ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Том 89 1989 №2

УДК 621.391.15

МАТЕМАТИКА

Г. А. Карагулян

О скорости стремления к бесконечности прямоугольных интегральных средних функций из $L^1(R^n)$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 4/IV 1989)

Пусть $I=\prod_{i=1}^{n}(a_k, b_k)$ n-мерный интервал в $R^n (n\geq 2)$. Через $|I|$ будем обозначать его Лебегову меру, а $d(I)$ – диаметр этого интервала. Обозначим также

$$m(I)=\min_{1\leq k\leq n}(b_k-a_k), \quad M(I)=\max_{1\leq k\leq n}(b_k-a_k).$$

Скажем, что интеграл функции $f\in L^1(R^n)$ в точке $x\in R^n$ дифференцируется по n-мерным интервалам, если имеет место равенство

$$\lim_{\substack{d(I)\to 0\\ x\in I}}\frac{1}{|I|}\int_I f=f(x).$$

Известна теорема Сакса ([1]) о том, что при $n\geq 2$ существует функция $f\in L^1(R^n)$, интеграл которой не дифференцируется по n-мерным интервалам в каждой точке $x\in R^n$ и, более того, выполняется равенство

$$\overline{\lim_{\substack{d(I)\to 0\\ x\in I}}}\frac{1}{|I|}\int_I f=+\infty, \quad x\in R^n,$$

а также теорема Йессена—Марцинкевича—Зигмунда ([2]) о том, что интегралы функций класса $L\ln^{n-1}L(R^n)$ дифференцируются по n-мерным интервалам п. в.

Возникает вопрос, с какой скоростью могут стремиться к бесконечности интегральные средние $\frac{1}{|I|}\int_I f$ в теореме Сакса. Нами получены результаты положительного и отрицательного характера, которые близки к окончательному решению этого вопроса.

Введем возрастающую функцию $\varphi(t)$, $t\in(a, +\infty)$, $a>0$, с условиями

1) $\varphi(t)>0$, $\varphi(t^2)<c\varphi(t)$ при $t>a$;

2) $$\left|\int_0^{\alpha}\frac{1}{x\ln\frac{1}{x}\,\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}dx\right|<\infty, \quad \alpha>0,$$

где a и α некоторые постоянные. Примерами таких функций могут служить следующие:

$$\varphi(t)=\ln\ln t\cdot\ln\ln\ln t\cdot\ldots\cdot(\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k} t)^{\alpha},\quad \alpha>1,\quad k\geqslant 2.$$

Теорема 1. *Пусть $n\geqslant 2$ и $\varphi(t)$ — возрастающая функция с условиями 1) и 2). Тогда для любой функции $f\in L^1(R^n)$ имеем*

$$\lim_{\substack{d(I)\to 0\\ x\in I}}\frac{\frac{1}{|I|}\int\limits_I f}{\ln^{n-1}\frac{1}{M(I)}\varphi\left(\frac{1}{M(I)}\right)}=0\quad \text{п. в.}\quad x\in R^n.$$

Теорема 2. *Пусть $n\geqslant 2$ и*

$$\Phi(t)=o(\ln^{n-1}t)\quad \textit{при}\quad t\to\infty.$$

Тогда существует функция $f\in L^1(R^n)$ такая, что

$$\overline{\lim_{\substack{d(I)\to 0\\ x\in I}}}\frac{\frac{1}{|I|}\int\limits_I f}{\Phi\left(\frac{1}{m(I)}\right)}=+\infty\quad \textit{при всех}\quad x\in R^n.$$

Теорема 1 получается как следствие следующего более общего результата.

Теорема 3. *Для любой возрастающей функции $\varphi(t)$ с условиями 1) и 2) при любой $f\in L^1(R^n)$ имеет место неравенство*

$$\left|\left\{x\in R^n;\quad \max_{I\ni x}\frac{\frac{1}{|I|}\int\limits_I f}{\ln^{n-1}\frac{1}{M(I)}\varphi\left(\frac{1}{M(I)}\right)}>\lambda\right\}\right|<\frac{c}{\lambda}\int\limits_{R^n} f,$$

где $c>0$ зависит только от $\varphi(t)$.

Теорема 1 может найти применение в теории кратных ортогональных рядов. В частности, справедливы следующие теоремы.

Теорема 4. *Для частичной суммы $S_k(x, f)$, $k=(k_1, \ldots k_n)$, $n\geqslant 2$, кратного ряда Фурье—Хаара функции $f\in L^1((0, 1)^n)$ имеет место соотношение*

$$S_k(x, f)=o\,(\ln^{n-1}(\min_{1\leqslant i\leqslant n} k_i)\,\varphi(\min_{1\leqslant i\leqslant n} k_i)),\quad \min_{1\leqslant i\leqslant n} k_i\to\infty,$$

где $\varphi(t)$ — функция из теоремы 1.

Теорема 5. *Для $(c, 1)$ средних $\sigma_k(x, f)$, $k=(k_1, \ldots, k_n)$, $n\geqslant 2$, кратного тригонометрического ряда Фурье функции $f\in L^1((0, 2\pi)^n)$ имеем*

$$\sigma_k(x, f)=o\,(\ln^{n-1}(\min_{1\leqslant i\leqslant n} k_i)\varphi(\min_{1\leqslant i\leqslant n} k_i)),\quad \min_{1\leqslant i\leqslant n} k_i\to\infty,$$

где $\varphi(t)$ — функция из теоремы 1.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ա. ԿԱՐԱԳՈՒԼՅԱՆ

$L^1(R^n)$ դասի ֆունկցիաների ուղղանկյուն ինտեգրալ միջինների անվերջի զուգամիտելու մասին

Հետազոտվում է, թե $\frac{1}{|I|}\int_I f$, $I\ni x$, ինտեգրալ միջինները, որտեղ I-ն n-չափանի ուղղանկյուն է և $f\in L^1(R^n)$, $n\geq 2$ ինչ արագությամբ կարող են ձգտել անվերջության, երբ $d(I)\to 0$։

Ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

Թեորեմ 1. Երբ $n\geqslant 2$ և $\varphi(t)$-ն, $t\in(a,\infty)$, $a>0$, աճող ֆունկցիա է, որը բավարարում է 1) և 2) պայմաններին, ապա ցանկացած $f\in L^1(R^n)$ ֆունկցիայի համար

$$\lim_{\substack{d(I)\to 0\\ x\in I}} \frac{\frac{1}{|I|}\int_I f}{\ln^{n-1}\frac{1}{M(I)}\,\varphi\left(\frac{1}{M(I)}\right)}=0 \quad \text{հ. բ.} \quad x\in R^n.$$

Թեորեմ 2. Երբ $n\geqslant 2$ և $\Phi(t)=o(\ln^{n-1}t)$, երբ $t\to\infty$, ապա գոյություն ունի այնպիսի $f\in L^1(R^n)$, որի համար

$$\overline{\lim_{\substack{d(I)\to 0\\ x\in I}}} \frac{\frac{1}{|I|}\int_I f}{\Phi\left(\frac{1}{m(I)}\right)}=+\infty, \quad \text{երբ} \quad x\in R^n.$$

Նշվում են նաև արդյունքներ, որոնք վերաբերվում են բազմաչափ օրթոգոնալ շարքերին և ստացվում են որպես հետևանքներ առաջին թեորեմից։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] S. Saks, Fund. Math., v. 22, p. 257—261 (1934). [2] B. Jessen, J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, Fund. Math., v. 25. p. 217—234 (1935).