ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 89 1989 №1

УДК 517.984

МАТЕМАТИКА

Л. З. Геворкян

Разложение по собственным функционалам несамосопряженного оператора. Иллюстративный пример

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Б. Нерсесяном 14/III 1989)

Пусть A оператор скалярного типа с простым спектром в конечномерном гильбертовом пространстве H. Как хорошо известно ([1], с. 97), это эквивалентно тому, что существует базис пространства H, состоящий из собственных векторов оператора A, причем каждое собственное значение простое. Обозначим этот базис через $\{e_\lambda\}$, где λ принадлежит спектру оператора A. Пусть $\{e^*_\mu\}$ биортогональная к $\{e_\lambda\}$ система, т. е. $(e_\lambda, e^*_\mu)=\delta_{\lambda\mu}$, где $\delta_{\lambda\mu}$ —символ Кронекера. Известно также, что система $\{e^*_\mu\}$ является совокупностью собственных векторов оператора A^*, причем соответствующее собственное значение равно $\bar{\mu}$.

Введем функцию $x(\mu)=(x, e^*_\mu)$. При этом элементу Ax соответствует функция $(Ax, e^*_\mu)=(x, A^*e^*_\mu)=\mu(x, e^*_\mu)=\mu x(\mu)$, т. е. при преобразовании $x\to x(\mu)$ оператор A переходит в оператор умножения на независимую переменную. Принято считать, что это утверждение является содержанием спектральной теоремы ([2], с. 11). Однако оно решает лишь первую половину проблемы, которая называется задачей спектрального анализа. Вторая половина, а именно, задача спектрального синтеза, решается восстановлением элемента x по формуле

$$x=\sum_{\lambda\in SpA}(x, e^*_\lambda)e_\lambda=\sum_{\lambda\in SpA}x(\lambda)e_\lambda$$

([1], с. 167).

Этот результат, с соответствующими поправками, переносится на класс самосопряженных и, в меньшей степени, класс нормальных операторов, действующих в бесконечномерном пространстве. При этом, в общем случае, собственные векторы заменяются на собственные функционалы, а суммы—на интегралы.

Наша ближайшая цель—распространить указанную конструкцию на некоторый другой класс операторов. Пусть B_α оператор, действующий в пространстве $L^2(0, 1)$ по формуле

$$(B_\alpha f)(x)=xf(x)+\alpha\int_0^x G(x-t)f(t)dt, \tag{1}$$

где G функция из $L^1(0, 1)$, α—произвольное комплексное число (множитель α выделен из соображений удобства). Как хорошо известно ([1], с. 336), собственный функционал оператора B_α^*, отвечающий собственному значению $\bar{\lambda}$, определяется условием

$$\varphi_\lambda(B_\alpha f)=\lambda\varphi_\lambda(f). \tag{2}$$

Предположим, что функционал φ_λ задается как свертка с некоторым ядром

$$\varphi_\lambda(f)=\int\limits_0^\lambda K(\lambda-x)f(x)dx. \tag{3}$$

Из условия (2), учитывая (1) и (3) и поменяв порядок интегрирования, получим, что K удовлетворяет интегральному уравнению

$\alpha\int\limits_t^\lambda K(\lambda-x)G(x-t)dx=(\lambda-t)K(\lambda-t)$, которое заменой переменной сводится к

$$\alpha\int\limits_0^\xi K(\eta)G(\xi-\eta)d\eta=\xi K(\xi). \tag{4}$$

Применяя преобразование Лапласа к (4) и решая полученное дифференциальное уравнение, будем иметь

$$\tilde{K}=e^{-\alpha\int\tilde{G}dp}, \tag{5}$$

где $\tilde{K}$ и $\tilde{G}$ являются преобразованиями Лапласа K и G соответственно. Отсюда ядро K можно найти обратным преобразованием Лапласа.

Будем искать теперь собственный функционал ψ_λ оператора B_α, отвечающий собственному значению λ в виде

$$\psi_\lambda(g)=\int\limits_\lambda^1\overline{S(x-\lambda)}g(x)dx. \tag{6}$$

Поступая, как и выше, получим интегральное уравнение

$$\bar{\alpha}\int\limits_\lambda^t\overline{S(x-\lambda)}\;\overline{G(t-x)}\,dx=(\lambda-t)\overline{S(t-\lambda)}, \tag{7}$$

решение которого (в терминах преобразований Лапласа) имеет вид

$$\tilde{\tilde{S}}=e^{\alpha\int\tilde{G}dp}. \tag{8}$$

Выбирая константы, входящие в (5) и (8) неявным образом, как следует, получим $K\tilde{\tilde{S}}=1$ или

$$\int\limits_\lambda^x K(x-t)\overline{S(t-\lambda)}\,dt=\delta(x-\lambda), \tag{9}$$

которое есть условие биортогональности в случае непрерывного спектра. Равенство (9) означает также, что K и $\overline{S}$ являются ядрами взаимно-обратных интегральных преобразований.

Приведенные рассуждения, конечно, носят эвристический характер и нуждаются в обосновании. Мы не будем делать этого в общем случае, заметим лишь, что полное исследование простейшего оператора (с $G(x)\equiv 1$) проводится далее.

Приведем несколько примеров, где ядро K (и S) удается найти в явном виде.

1. Пусть $G(x)\equiv 1$. Тогда $\overline{K}=p^{-\alpha}$, откуда $K=x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$. Обратный оператор задается ядром $S=x^{-\alpha-1}/\Gamma(-\alpha)$.

2. Пусть $G(x)=\cos ax$, тогда $\overline{G}=p/p^2+a^2$, откуда $\overline{K}=(p^2+a^2)^{-\alpha/2}$. Обратное преобразование дает

$$K(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha/2)}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}}J_{\frac{\alpha-1}{2}}(ax),$$

где $J_m(z)$ функция Бесселя первого рода. В частном случае $\alpha=1$ обратный оператор имеет вид

$$(Sf)(x)=\int\limits_0^x\frac{J_1(x-t)}{x-t}f(t)dt+f'(t).$$

3. Пусть $G(x)=ax+b$, тогда $\overline{G}(p)=\dfrac{a}{p^2}+\dfrac{b}{p}$, откуда

$$\overline{K}=p^{-\alpha b}e^{\frac{\alpha a}{p}}$$

Для этой функции оригиналом при $\alpha a<0$ является

$$K(x)=\left(\frac{x}{\alpha a}\right)^{\frac{\alpha b-1}{2}}J_{\alpha b-1}(2\sqrt{\alpha a x}),$$

а при $\alpha a>0$ $K(x)=\left(\dfrac{x}{\alpha a}\right)^{\frac{\alpha b-1}{2}}I_{\alpha b-1}(2\sqrt{\alpha a x})$,

где $I_m(z)$ функция Бесселя чисто мнимого аргумента.

Приведенные примеры показывают, что соответствующее интегральные преобразование существенным образом зависит от α.

Вернемся теперь к простейшему случаю $(A_\alpha f)(x)=xf(x)+\alpha\int\limits_0^x f(t)dt$.

Этому семейству операторов посвящено довольно большое число работ. Так, например, Л. А. Сахнович доказал, что операторы A_α и A подобны [4], впоследствии Калиш доказал, что операторы A_α и $A_{\mathrm{Re}\,\alpha}$ подобны в любом пространстве $L^p(0,1)$ [5]. В работе автора [6] построена модель для оператора A_α.

Обозначим через D_0 пространство всех бесконечно дифференцируемых функций, для которых конечна величина

$$\sup_{t\in]0,1[} |f^{(k)}(t)| \text{ и } \lim_{t\to+0} f^{(k)}(t)=0,\ k\in Z^+.$$

Если выполнено условие $\lim\limits_{t\to 1-0} f^{(k)}(t)=0$, то соответствующее пространство обозначим через D_1. Нетрудно установить, что D_0 инвариантно относительно A_α и D_1 — относительно A^*_α.

Определим функционал φ над D_0 по формуле

$$\varphi(f)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,$$

где интеграл понимается в смысле регуляризованного значения, т. е. при $-n<\mathrm{Re}\,\alpha\leqslant -n+1$, $n\in N$

$$\varphi(f)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+n)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha+n-1}f^{(n)}(t)dt. \qquad (10)$$

Посчитав $\varphi(A_\alpha f)$, получим $\lambda\varphi(f)$, т. е. φ является собственным функционалом оператора A^*_α. Определим теперь функционал ψ над D_1 по формуле

$$\psi(g)=\frac{1}{\Gamma(-\bar\alpha)}\int\limits_\lambda^1 (x-\lambda)^{-\bar\alpha-1}g(x)dx, \text{ т. е. при } n-1\leqslant \mathrm{Re}\,\alpha<n$$

$$\psi(g)=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\bar\alpha)}\int\limits_\lambda^1 (x-\lambda)^{-\bar\alpha+n-1}g^{(n)}(x)dx. \qquad (11)$$

Прямые вычисления показывают, что $\psi(A^*_\alpha g)=\lambda\psi(g)$. Отметим, что функционалы φ и ψ порождаются одной и той же обобщенной функцией $(x-\lambda)^\beta_+/\Gamma(\beta+1)$.

Формула (10) определяет оператор дробного интегрирования J^α Римана—Лиувилля порядка α над D_0, а формула (11) — оператор $K^{-\bar\alpha}$ над D_1. Нетрудно установить, что J^α является автоморфизмом пространства D_0, а K^α — пространства D_1. Это обстоятельство позволяет определить операторы J^α и K^α над всем пространством $L^2(0,1)$. Как это делается в теории интегральных преобразований обобщенных функций ((7), с. 93 и (8), с. 130), $J^\alpha f$ есть элемент пространства D_1, равный $(J^\alpha f)(g)=f(K^\alpha g)$. При этом интегральное преобразование J^α переводит оператор A_α в оператор умножения на независимую переменную, а функция f восстанавливается по $J^\alpha f$ по формуле $f=J^{-\alpha}J^\alpha f$. Тем самым задачи спектрального анализа и синтеза полностью решены.

Отметим, что спектральный оператор скалярного типа в гильбертовом пространстве подобен нормальному ((9), с. 40). Недавно В. Ф. Веселов (10) показал, что A_α при любом α с $\mathrm{Re}\,\alpha\neq 0$ не подобен самосопряженному. Сейчас мы покажем, что оператор A_α, вообще говоря, не подобен гипонормальному. Это следует из того факта, что оператор A_{-1} обладает континуальным семейством собственных функций $\Theta(x-t)$, $t\in[0, 1]$, где Θ—единичная ступенька Хевисайда. Так как при подобии точечный спектр сохраняется ([11], с. 47), а собственные векторы гипонормального оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны ([11], с. 302), предположение о подобии противоречило бы сепарабельности пространства $L^2(0, 1)$.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Լ. Զ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Վերլուծություն ըստ ոչ-ինքնահամալուծ օպերատորի սեփական ֆունկցիոնալների: Լուսաբանող օրինակ

Հիլբերտյան H տարածության որոշակի դասի A օպերատորների համար ցույց է տրվել, որ ինտեգրալ օպերատորը, որի կորիզը A օպերատորի սեփական ֆունկցիոնալն է, A օպերատորը բերում է անկախ փոփոխականով բազմապատկման օպերատորի, իսկ H-ի ցանկացած տարր իր ինտեգրալային տեղափոխության միջոցով արտահայտվում է մեկ այլ ինտեգրալային օպերատորով, որի կորիզը A-ի սեփական ֆունկցիոնալն է։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. М. Глазман, Ю. И. Любич*, Конечномерный линейный анализ, Наука, М., 1969. [2] *Н. К. Никольский*, Лекции об операторе сдвига, Наука, М., 1980. [3] *Ю. М. Березанский*, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Наукова думка, Киев, 1965. [4] *Л. А. Сахнович*, Мат. сб., т. 44, с. 180—186 (1958). [5] *G. K. Kalish*, Colloq. Math Janos Bolai, 5, Hilbert space operators and operator algebras, Tiliany (Hungary), 1970, North Holland Publ. Co Amsterdam—London, 1972. [6] *Л. З. Геворкян*, Изв АН АрмССР. Математика, т. 16, с. 274—284 (1981). [7] *Ю. А. Брычков, А. П. Прудников*, Интегральные преобразования обобщенных функций, Наука, М., 1977. [8] *С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев*, Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения, Наука и техника, Минск, 1987. [9] *Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц*, Линейные операторы, т. 3, Мир, М., 1974. [10] *В. Ф. Веселов*, Вестник ЛГУ, № 22, с. 91—94, 1985. [11] *П. Халмош*, Гильбертово пространство в задачах, Мир, М., 1970.