ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 89 1989 №1

УДК 517.94

МАТЕМАТИКА

А. З. Степанян

Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций одной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с быстроосциллирующими коэффициентами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Б. Нерсесяном 6/III 1989)

В настоящей работе использован подход, предложенный в статье (1). Рассматривается следующая задача на собственные значения:

$$L_\varepsilon u_\varepsilon(x)+\lambda(\varepsilon)\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon(x)\equiv\frac{d^2}{dx^2}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^2u_\varepsilon(x)}{dx^2}\right)+$$

$$+\frac{d}{dx}\left(b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{du_\varepsilon(x)}{dx}\right)+c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon(x)+\lambda(\varepsilon)\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon(x)=0,\quad x\in(0,1). \tag{1}$$

$$u_\varepsilon(0)=u_\varepsilon(1)=\frac{du_\varepsilon}{dx}(0)=\frac{du_\varepsilon}{dx}(1)=0, \tag{2}$$

где функции $a(\xi)$, $b(\xi)$, $c(\xi)$, $\rho(\xi)$ предполагаются гладкими и периодическими с периодом 1,

$$a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\geqslant a_0=\mathrm{const}>0,\quad b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\leqslant 0,\quad c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\geqslant 0,$$

$$\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\geqslant \rho_0=\mathrm{const}>0.$$

Предполагается также, что спектр рассматриваемого оператора простой. Тогда, если обозначим k-е собственное значение через

$$\lambda^k(\varepsilon),\ \text{то}\ 0>\lambda^1(\varepsilon)>\lambda^2(\varepsilon)>\ldots>\lambda^k(\varepsilon)>\ldots.$$

Известно, что при наложенных условиях оператор A_ε, действующий в пространстве $L_2(0,1)$ и ставящий в соответствие функции f решение u_ε задачи

$$L_\varepsilon u_\varepsilon=f,\qquad u_\varepsilon(0)=u_\varepsilon(1)=\frac{du_\varepsilon}{dx}(0)=\frac{du_\varepsilon}{dx}(1)=0$$

$(A_\varepsilon=L_\varepsilon^{-1})$, является самосопряженным, положительным, компактным оператором.

Будем искать асимптотическое разложение собственного значения $\lambda^k(\varepsilon)$ и соответствующей ему собственной функции $u_\varepsilon^k(x)$ задачи (1), (2) в виде

$$\lambda^{(M)}(\varepsilon)=\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+\ldots+\varepsilon^{M+4}\lambda_{M+4}, \qquad (3)$$

$$u_\varepsilon^{(M)}(x)=\sum_{l=0}^{M+4}\varepsilon^l\left(\sum_{s=0}^{l}N^{(l,s)}(\xi)\frac{d^s v_s(x)}{dx^s}\right), \quad \xi=\varepsilon^{-1}x \qquad (4)$$

(индекс k здесь и далее, для простоты, будем опускать).

Предполагается, что $M\geqslant 0$ — целое число, $N^{(l,s)}(\xi)$ и $v_s(x)$ — подлежащие определению функции, λ_l — подлежащие определению числа. В дальнейшем будем считать, что функции $N^{(l,s)}$ определены для всех целых значений индексов i, s, причем $N^{(i,s)}\equiv 0$, если $i<0$, или $s<0$ или $i<s$. Там, где пределы суммирования не будут указаны, будем предполагать, что суммирование проводится по всем таким индексам i, s, при которых функция $N^{(i,s)}$ не равна нулю тождественно.

Подставим выражения (3), (4) в уравнение (1). Получим

$$L_\varepsilon u_\varepsilon^{(M)}(x)+\lambda^{(M)}(\varepsilon)\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon^{(M)}(x)=\sum_{l=-4}^{M}\varepsilon^l\sum_s\Bigg|\frac{d^2}{d\xi^2}\left(a\left(\frac{d^2N^{(l+4,s)}}{d\xi^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\frac{dN^{(l+3,s-1)}}{d\xi}+N^{(l+2,s-2)}\right)\right)+2\frac{d}{d\xi}\left(a\left(\frac{d^2N^{(l+3,s-1)}}{d\xi^2}+2\frac{dN^{(l+2,s-2)}}{d\xi}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+N^{(l+1,s-3)}\right)\right)+a\left(\frac{d^2N^{(l+2,s-2)}}{d\xi^2}+2\frac{dN^{(l+1,s-3)}}{d\xi}+N^{(l,s-4)}\right)+ \qquad (5)$$

$$+\frac{d}{d\xi}\left(b\left(\frac{dN^{(l+2,s)}}{d\xi}+N^{(l+1,s-1)}\right)\right)+b\left(\frac{dN^{(l+1,s-1)}}{d\xi}+N^{(l,s-2)}\right)+cN^{(l,s)}+$$

$$+\sum_{r=0}^{l}\lambda_r N^{(l-r,s)}\rho\Bigg|\frac{d^s v_s}{dx^s}+\varepsilon^{M+1}F_\varepsilon(x)=\sum_{l=-4}^{M}\varepsilon^l\sum_s M^{(l+4,s)}(\xi)\frac{d^s v_s}{dx^s}+\varepsilon^{M+1}F_\varepsilon^1(x),$$

где $F_\varepsilon^1(x)$ есть сумма слагаемых вида $\varepsilon^t\varphi(\xi)\dfrac{d^l v_s}{dx^l}$, $t\geqslant 0$, $l<M+8$, $\varphi(\xi)$ ограничена.

Потребуем, чтобы коэффициенты $M^{(l,s)}$ были постоянными, равными $h^{(l,s)}$. Это дает уравнения для определения функций $N^{(l,s)}$, причем постоянные $h^{(l,s)}$ выбираются так, чтобы полученные уравнения имели решения. Тогда, в частности, получим

$$h^{(l,s)}=0,\ l=0,1,2,3,\ s<l;$$

$$h^{(4,4)}=\langle a^{-1}\rangle^{-1},\ h^{(4,2)}=\langle b\rangle,\ h^{(4,0)}=\langle c\rangle+\lambda_0\langle\rho\rangle;\ \langle f\rangle=\int_0^1 f(x)dx. \qquad (6)$$

Определив таким образом все функции $N^{(l,s)}$, из (5) получим

$$L_\varepsilon u_\varepsilon^{(M)}(x)+\lambda^{(M)}(\varepsilon)\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon^{(M)}(x)=\sum_{l=0}^{M}\varepsilon^l\left(\sum_{s=0}^{l+4}h^{(l+4,s)}\frac{d^s v_s}{dx^s}\right)+\varepsilon^{M+1}F_\varepsilon^2(x)= \qquad (7)$$

$$=\sum_{l=0}^{M}\varepsilon^l\left(\sum_{s=0}^{l+4}\bar h^{(l+4,s)}\frac{d^s v_s}{dx^s}+\lambda_l\langle\rho\rangle v_s\right)+\varepsilon^{M+1}F_\varepsilon(x),$$

где функция F_ε^2 имеет вид функции F_ε^1,

$$\bar h^{(l+4,s)}=h^{(l+4,s)}-\lambda_l\langle\rho\rangle\delta_0^s,\quad \text{где } \delta_0^s=\begin{cases}1 & \text{при } s=0,\\ 0 & \text{при } s\neq 0\end{cases}$$

(из выражений для $h^{(i,s)}$ выводятся члены, содержащие числа λ_i).

Для того, чтобы равнялась нулю сумма в правой части (7), функция v_ε ищется в виде суммы

$$v_\varepsilon(x)=v_0(x)+\varepsilon v_1(x)+\ldots+\varepsilon^M v_M(x).$$

Подставив это выражение для v_ε в (7), получим

$$L_\varepsilon u_\varepsilon^{(M)}(x)+\lambda^{(M)}(\varepsilon)\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon^{(M)}(x)=\sum_{i=0}^{M}\varepsilon^i\left(\sum_{p=0}^{i}\sum_{s=0}^{i-p+4}\bar{h}^{(i-p+4,s)}\frac{d^s v_p}{dx^s}+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{i}\lambda_{i-p}\langle\rho\rangle v_p\right)+\varepsilon^{M+1}F_\varepsilon^3(x),$$

где F_ε^3 также имеет вид F_ε^1.

Определим теперь $v_p(x)$, $p=0,\ldots,M$ как функции, удовлетворяющие равенствам

$$\sum_{p=0}^{i}\sum_{s=0}^{i-p+4}\bar{h}^{(i-p+4,s)}\frac{d^s v_p}{dx^s}+\sum_{p=0}^{i}\lambda_{i-p}\langle\rho\rangle v_p=0,\quad i=0,\ldots,M \tag{8}$$

и краевым условиям

$$\begin{gathered}
\sum_{p=0}^{i}\sum_{s=0}^{i-p}N^{(i-p,s)}(0)\frac{d^s v_p(0)}{dx^s}=0,\\
\sum_{p=0}^{i}\sum_{s=0}^{i-p}N^{(i-p,s)}(0)\frac{d^s v_p(1)}{dx^s}=0,\\
\sum_{p=0}^{i}\sum_{s}\left(\frac{dN^{(i-p+1,s)}(0)}{d\xi}+N^{(i-p,s-1)}(0)\right)\frac{d^s v_p(0)}{dx^s}=0,\\
\sum_{p=0}^{i}\sum_{s}\left(\frac{dN^{(i-p+1,s)}(0)}{d\xi}+N^{(i-p,s-1)}(0)\right)\frac{d^s v_p(1)}{dx^s}=0,\\
i=0,\ldots,M.
\end{gathered}\tag{9}$$

Выделив в равенствах (8) и (9) члены, содержащие v_i и λ_i и используя выражения (6), получим следующие краевые задачи: для определения функции v_0 —

$$\langle a^{-1}\rangle^{-1}\frac{d^4v_0}{dx^4}+\langle b\rangle\frac{d^2v_0}{dx^2}+\langle c\rangle v_0+\lambda_0\langle\rho\rangle v_0=0. \tag{10}$$

$$v_0(0)=v_0(1)=\frac{dv_0(0)}{dx}=\frac{dv_0(1)}{dx}=0; \tag{11}$$

для определения функций v_i, $i=1,\ldots,M$ —

$$\begin{gathered}
\langle a^{-1}\rangle^{-1}\frac{d^4v_i}{dx^4}+\langle b\rangle\frac{d^2v_i}{dx^2}+\langle c\rangle v_i+\lambda_0\langle\rho\rangle v_i=\\
=-\sum_{p=0}^{i-1}\sum_{s}\bar{h}^{(i-p+4,s)}\frac{d^s v_p}{dx^s}-\sum_{p=1}^{i-1}\lambda_{i-p}\langle\rho\rangle v_p-\lambda_i\langle\rho\rangle v_0,
\end{gathered}\tag{12}$$

$$v_i(0)=-\sum_{p=0}^{i-1}\sum_{s}N^{(i-p,s)}(0)\frac{d^s v_p(0)}{dx^s},$$

$$v_i(1) = -\sum_{p=0}^{i-1} \sum_s N^{(i-p,s)}(0) \frac{d^s v_p(1)}{dx^s},$$

$$\frac{dv_i(0)}{dx} = -\sum_{p=0}^{i-1} \sum_s \left(\frac{dN^{(i-p+1,s)}(0)}{d\xi} + N^{(i-p,s-1)}(0) \right) \frac{d^s v_p(0)}{dx^s}, \tag{13}$$

$$\frac{dv_i(1)}{dx} = -\sum_{p=0}^{i-1} \sum_s \left(\frac{dN^{(i-p+1,s)}(0)}{d\xi} + N^{(i-p,s-1)}(0) \right) \frac{d^s v_p(1)}{dx^s}.$$

Задача (10), (11) является усреднением задачи (1), (2). Предположим, что собственные значения λ_0^k задачи (10), (11) тоже однократные. Можно показать, что $\lambda^k(\varepsilon) \to \lambda_0^k$ при $\varepsilon \to 0$, $k = 1, 2, \ldots$, так что целесообразно в разложении (3) брать λ_0 равной k-му собственному значению λ_0^k задачи (10), (11). Но тогда в разложении (4) надо брать $v_0 = v_0^k$ (v_0^k—k-я собственная функция усредненной задачи, соответствующая собственному значению λ_0^k), что непосредственно следует из (10), (11).

Из (12) (13) можно теперь по индукции определить все величины λ_i и функции v_i, используя третью теорему Фредгольма для оператора A, действующего в пространстве $L_2(0, 1)$ и ставящего в соответствие функции f решение u задачи

$$\langle a^{-1} \rangle^{-1} \frac{d^4 u}{dx^4} + \langle b \rangle \frac{d^2 u}{dx^2} + \langle c \rangle u = f, \quad x \in (0, 1),$$

$$u(0) = u(1) = \frac{du(0)}{dx} = \frac{du(1)}{dx} = 0.$$

Таким образом, в (3) и (4) определены все числа λ_i и функции $N^{(i,s)}$ и v. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Для собственных значений $\lambda^k(\varepsilon)$ и соответствующих собственных функций $u_\varepsilon^k(x)$ задачи* (1), (2) *имеют место оценки*

$$|\lambda^{(M)}(\varepsilon) - \lambda^k(\varepsilon)| \leqslant c_1(k) \varepsilon^{M+1}, \tag{14}$$

$$\|u_\varepsilon^{(M)}(x) - u_\varepsilon^k(x)\|_{L_2(0,1)} \leqslant c_2(k) \varepsilon^{M+1}, \tag{15}$$

где постоянные $c_1(k)$, $c_2(k)$ не зависят от ε.

Замечание 1. Из построения видно, что функции v_i определяются с точностью слагаемого cv_0, где $c = \text{const}$, а v_0—собственная функция задачи (10), (11), соответствующая собственному значению λ_0. Но эта неоднозначность влияет только на величину константы $c_2(k)$. Функции v_i можно определить однозначно, если потребовать, чтобы

$$(v_i, v_0)_{L_2(0,1)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Замечание 2. Для получения результатов настоящей работы достаточно потребовать, чтобы были простыми собственные значения усредненной задачи (10), (11). Тогда при достаточно малом ε будут простыми и первые K собственные значения задачи (1), (2) для заранее заданного произвольного числа K.

С другой стороны, собственные значения усредненной задачи будут простыми, например, в случае $\langle b\rangle = 0$.

Замечание 3. Легко видеть, что оценки (14) и (15) получатся и тогда, когда в разложениях (3) и (4) верхние пределы сумм взять равными M, а не $M+4$.

Республиканский главный вычислительный центр
Госагропрома Армянской ССР

Ա. Զ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

Արագ տատանվող գործակիցներով չորրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար մի խնդրի սեփական արժեքների և սեփական ֆունկցիաների ասիմպտոտիկ վերլուծությունը

Ուսումնասիրվում է հետևյալ խնդիրը.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^2u_\varepsilon(x)}{ax^2}\right)+\frac{d}{dx}\left(b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{du_\varepsilon(x)}{dx}\right)+c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon(x)+$$

$$+\lambda(\varepsilon)\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon(x)=0, \quad x\in(0,1),$$

$$u_\varepsilon(0)=u_\varepsilon(1)=\frac{du_\varepsilon}{dx}(0)=\frac{du_\varepsilon}{dx}(1)=0,$$

որտեղ ε-ը փոքր պարամետր է, $a(\xi)$, $b(\xi)$, $c(\xi)$, $\rho(\xi)$ *ֆունկցիաները պարբերական են 1 պարբերությամբ,*

$$a(\xi)\geqslant a_0>0,\ \rho(\xi)\geqslant\rho_0>0,\ b(\xi)\leqslant 0,\ c(\xi)\geqslant 0:$$

Ամեն մի $\lambda^k(\varepsilon)$ *սեփական արժեքի և նրան համապատասխանող* $u_\varepsilon^k(x)$ *սեփական ֆունկցիայի համար կառուցվում են*

$$\lambda^{(M)}=\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+\ldots+\varepsilon^M\lambda_M,$$

$$u_\varepsilon^{(M)}(x)=\sum_{l=0}^{M}\varepsilon^l\left(\sum_{s=0}^{l}N^{(l,s)}(\xi)\frac{d^s v_\varepsilon(x)}{dx^s}\right), \quad \xi=\varepsilon^{-1}x$$

վերլուծություններ, այնպիսին, որ

$$|\lambda^{(M)}(\varepsilon)-\lambda^k(\varepsilon)|\leqslant c_1(k)\varepsilon^{M+1},$$

$$\|u_\varepsilon^{(M)}(x)-u_\varepsilon^k(x)\|_{L_2(0,1)}\leqslant c_2(k)\varepsilon^{M+1},$$

որտեղ $c_1(k)$, $c_2(k)$ *հաստատունները կախված չեն ε-ից:*

Աշխատանքում օգտագործվել է ([1]) *աշխատանքի մոտեցումը:*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. А. Иосифьян, О. А. Олейник, А. С. Шамаев*, Вестн. Моск. ун-та. Матем., мех., № 6, 1985.