ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Том 89 1989 №1

УДК 519.1+519.71

МАТЕМАТИКА

Б. Е. Торосян

Сводимость $\{F\}$-отделимых подмножеств и оценки их чисел в конечных множествах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 28/II 1989)

В статье развиваются некоторые результаты, представленные в работах [1-3]. Поэтому, хотя и некоторые из приведенных ниже (пункт 1) утверждений легко распространяются на бесконечные множества, мы продолжаем ограничиваться рассмотрением непустых конечных множеств точек n-мерного евклидова пространства R^n. Кроме того, рассматриваются непустые классы $\{G(\tilde{x})\}=\{G\}$, состоящие из вещественнозначных функций $G(\tilde{x})=G(x_1, \ldots, x_n)$.

1. Рассмотрим системы неравенств

$$1)\ \begin{cases} F(\tilde{x})\geqslant 0, \text{ при } \tilde{x}\in A_0 \\ F(\tilde{x})<0, \text{ при } \tilde{x}\in A\setminus A_0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} F(\tilde{x})>0, \text{ при } \tilde{x}\in A_0 \\ F(\tilde{x})\leqslant 0, \text{ при } \tilde{x}\in A\setminus A_0; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} F(\tilde{x})\leqslant 0, \text{ при } \tilde{x}\in A_0 \\ F(\tilde{x})>0, \text{ при } \tilde{x}\in A\setminus A_0; \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} F(\tilde{x})<0, \text{ при } \tilde{x}\in A_0 \\ F(\tilde{x})\geqslant 0, \text{ при } \tilde{x}\in A\setminus A_0; \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} F(\tilde{x})>0, \text{ при } \tilde{x}\in A_0 \\ F(\tilde{x})<0, \text{ при } \tilde{x}\in A\setminus A_0; \end{cases} \qquad 6)\ \begin{cases} F(\tilde{x})<0, \text{ при } \tilde{x}\in A_0 \\ F(\tilde{x})>0, \text{ при } \tilde{x}\in A\setminus A_0. \end{cases}$$

Подмножество $A_0\subseteq A$ называется $\{F\}$-отделимым в множестве $A\subset R^n$, если в классе $\{F\}$ разрешима хотя бы одна из систем 1)–4).

Определение 1. *Скажем, что $\{G\}$-отделимое в C подмножество $C_0\subseteq C$ имеет тип (i), $i\in\{\overline{1, 6}\}$, если его отделение в C можно реализовать системой типа i*

Пусть рассматриваются $\{F\}$-отделимость подмножеств в множестве $A\subset R^n$ и $\{H\}$-отделимость подмножеств в множестве $B\subset R^m$.

Определение 2. *Скажем, что $\{F\}$-отделимое в A подмножество $A_0\subseteq A$ и $\{H\}$-отделимое в B подмножество $B_0\subseteq B$ однотипны, если им можно приписать один и тот же тип.*

Ниже приводятся два варианта определения эквивалентности множеств $A\subset R^n$ и $B\subset R^m$ по рассмотрениям соответственно $\{F\}$- и $\{H\}$-отделений их подмножеств, представляющие определенный теоретико-практический интерес.

Определение 3. *Два множества будем считать эквивалентными по $\{F\}$- и $\{H\}$-отделениям их подмножеств, если существует взаимно-однозначное соответствие между множествами $\{F\}$-отделимых подмножеств по любой совокупности типов в од-*

ном и $\{H\}$-отделимых подмножеств по этой же совокупности типов в другом, ставящее в соответствие однотипные подмножества.

Определение 4. *Два множества будем считать эквивалентными по $\{F\}$- и $\{H\}$-отделениям подмножеств, если существует взаимно-однозначное соответствие между их элементами, ставящее $\{F\}$-отделимое подмножество первого множества в соответствие с однотипным $\{H\}$-отделимым подмножеством второго и наоборот.*

Рассмотрим преобразование координат, задаваемое в виде $\tilde{u}(\tilde{x})=(u_1(\tilde{x}),\ldots,u_m(\tilde{x}))$. Запись $A\xrightarrow{\tilde{u}(\tilde{x})}B$ означает, что преобразованием $\tilde{u}(\tilde{x})$ множество $A\subseteq R^n$ отображается на множество $B\subset R^m$. Подстановка преобразования $\tilde{u}(\tilde{x})$ в функцию $G(u_1,\ldots,u_m)$ предполагает образование функции $G(u_1(\tilde{x}),\ldots,u_m(\tilde{x}))\equiv G(\tilde{u}(\tilde{x}))$, а $\{G\}_{\tilde{u}(\tilde{x})}=$ $=\{G(\tilde{u}(\tilde{x}))/G(\tilde{u})\in\{G\}\}$. Предполагается, что операция подстановки выполняется только тогда, когда это возможно.

Определение 5. *Скажем, что класс $\{G\}$ замкнут относительно подстановки преобразования $\tilde{u}(\tilde{x})$, если $\{G\}_{\tilde{u}(\tilde{x})}\subseteq\{G\}$.*

Имеет место утверждение.

Теорема 1. *Пусть $A\xrightarrow{\tilde{u}(\tilde{x})}B$, а $\{G(\tilde{u})\}$—произвольный класс функций. Тогда:* 1) *множества A и B эквивалентны в смысле определения 3 при $\{H\}\equiv\{G\}$ и $\{F\}$ $\{G\}_{\tilde{u}(\tilde{x})}$;* 2) *если $\tilde{u}(\tilde{x})$ реализует взаимно-однозначное отображение, то A и B эквивалентны в смысле определения 4 при $\{H\}\equiv\{G\}$ и $\{F\}\equiv\{G\}_{\tilde{u}(\tilde{x})}$;* 3) *если $\{G\}_{\tilde{u}(\tilde{x})}\subseteq\{G\}$, то число $\{G\}$-отделимых подмножеств в B по любой совокупности типов не превосходит числа таких подмножеств в A;* 4) *если $C\xrightarrow{\tilde{u}(\tilde{x})}B$, то множества A и C эквивалентны в смысле определения 3 при $\{F\}\equiv\{G\}_{\tilde{u}(\tilde{x})}\equiv\{H\}$;* 5) *если $B\xrightarrow{\tilde{w}(\tilde{u})}A$, $\{G\}_{\tilde{u}(\tilde{x})}\subseteq\{G\}$ и $\{G\}_{\tilde{w}(\tilde{u})}\subseteq\{G\}$, то A и B эквивалентны в смысле определения 4 при $\{F\}\equiv\{H\}\equiv$ $\equiv\{G\}$.*

Отметим, что основной пункт 1) теоремы рассматривался ([4,5]) и являлся одним из основных фактов при обосновании универсальности $\{R\}$-моделей распознавания ([5,6]). Конструктивное доказательство теоремы позволяет сделать конкретные выводы и использовать их с целью оценки числа $\{F\}$-отделимых подмножеств и сложностей их отделений в конечных множествах. Например, пусть $\tilde{u}(\tilde{x})$—невырожденное линейное преобразование, $R^n\xrightarrow{\tilde{u}(\tilde{x})}R^n$ и $\{G(\tilde{x})\}$—класс всех многочленов не выше данной степени. Тогда, если $A\xrightarrow{\tilde{u}(\tilde{x})}B$, то A и B эквивалентны в смысле определения 4 при $\{F\}\equiv\{H\}\equiv\{G\}$.

2. По аналогии рассмотрений некоторых свойств линейно-отделимых ($\{\tilde{a}\tilde{x}+b\}$-отделимых) подмножеств множества $E^n=\{0,1\}^n$ (см. ([7–12])) ниже приводятся свойства таких подмножеств в других мно-

жествах. Ими мы пользуемся при обосновании пункта 3.

Если функция $F(\tilde{x})$ отделяет подмножества $A_0 \subseteq A$ в A, и $B \subseteq A$, то, очевидно, она реализует однотипное отделение подмножества $A_0 \cap B$ в B. Пусть $C\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_\nu \\ \sigma_1, \ldots, \sigma_\nu \end{pmatrix} = \{\tilde{x} \in C / x_{i_1} = \sigma_1, \ldots, x_{i_\nu} = \sigma_\nu\}$.

Утверждение 1. *Если подмножество $A_0 \subseteq A$ линейно-отделимо в A, то при любых $i_1, \ldots, i_\nu$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$ подмножество $A_0\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_\nu \\ \sigma_1, \ldots, \sigma_\nu \end{pmatrix}$ линейно-отделимо в множестве $A\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_\nu \\ \sigma_1, \ldots, \sigma_\nu \end{pmatrix}$.*

Пусть для конечного числа вещественных чисел ξ_i и η_j выполняется равенство $\sum \xi_i = \sum \eta_j$.

Утверждение 2. *Если подмножество $A_0 \subseteq A$ линейно-отделимо в A, то не существуют точки $\tilde{\alpha}_i \in A_0$ и $\tilde{\beta}_j \in A \setminus A_0$ такие, что $\sum \xi_i \tilde{\alpha}_i = \sum \eta_j \tilde{\beta}_j$.*

Скажем, что подмножество $B_0 \subseteq B$ k-асуммируемо в B, если для любых $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_k \in B_0$ и $\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_k \in B \setminus B_0$ равенство $\sum\limits_{i=1}^{k} \tilde{\alpha}_i = \sum\limits_{j=1}^{k} \tilde{\beta}_j$ невозможно.

Следствие. *Линейно-отделимое в A подмножество k-асуммируемо в A при любом $k \in N$.*

Говорят, что множества B и C сравнимы, если одно из них является подмножеством другого.

Пусть $A = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$, где $S_1, \ldots, S_n \subset R$. Скажем, что подмножество $A_0 \subseteq A$ k-сравнимо, если для любых $i_1, \ldots, i_k \in \{\overline{1, n}\}$; $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, $\delta_1, \ldots, \delta_k \in R$ множества $A_0\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_k \\ \sigma_1, \ldots, \sigma_k \end{pmatrix}$ и $A_0\begin{pmatrix} i_1, \ldots, i_k \\ \delta_1, \ldots, \delta_k \end{pmatrix}$ сравнимы. Скажем, что подмножество $A_0 \subseteq A$ k-однородно, если оно m-сравнимо при любом $m \leqslant k$; n-однородное подмножество $A_0 \subseteq A$ назовем вполне-однородным.

Теорема 2. *Линейно-отделимое в $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ подмножество k-однородно при любом $k \in \{\overline{1, n}\}$.*

Теорема 3. *Подмножество $A_0 \subseteq S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ вполне-однородно тогда и только тогда, когда оно $\left[\frac{n}{2}\right]$-однородно.*

3. Класс функций $\{F\}$ называется полным (по отделению) относительно множества $A \subset R^n$ [2], если всякому $\{F\}$-отделимому в A подмножеству можно приписать тип (5). В дальнейшем рассматриваются полные классы функций. Множества p-элементных $\{F\}$-отделимых в A и $\{F\}$-отделимых в A подмножеств обозначаются соответственно через $M(\{F\}, A, p)$ и $M(\{F\}, A)$.

Рассмотрим класс $\{F\} = \left\{\sum\limits_{i=1}^{q} a_i f_i(\tilde{x}) + b\right\}$ — линейное замыкание множества функций $\{f_1(\tilde{x}), \ldots, f_q(\tilde{x}), 1\}$. В [1,2,13] было установлено, что вектор $\Omega(\{F\}, A_0) = (\sum\limits_{\tilde{x} \in A_0} f_1(\tilde{x}), \ldots, \sum\limits_{\tilde{x} \in A_0} f_q(\tilde{x}), |A_0|)$ полностью и однозначно определяет $\{F\}$-отделимость подмножества $A_0 \subseteq A$ в A. Это утверждение является обобщением теоремы, доказанной Чоу для линейно-отделимых подмножеств множества E^n. Оно показывает, что вопрос оценки числа $\{F\}$-отделимых в A подмножеств сводится к оценке числа возможных векторов $\Omega(\{F\}, |A_0|)$ при $A_0 \subseteq A$. Установленные в ([1-3,13]) верхние оценки последнего числа завышены. Здесь опишем подход к дальнейшему усилению этих оценок.

Пусть $s_t(A)$, $t \in \{\overline{1, q}\}$, есть количество различных значений, принимаемых функцией $f_t(\tilde{x})$ в множестве A; $c_{t,1}(A), \ldots, c_{t,s_t(A)}(A)$ — эти значения; $r_{t,i}(A)$, $i \in \{\overline{1, s_t(A)}\}$, — число точек множества A, в которых функция $f_t(\tilde{x})$ принимает значение $c_{t,i}(A)$, а $r_{t,i}(A, p) = \min\{p, r_{t,i}(A)\}$. Тогда число возможных значений суммы $\sum\limits_{x \in A_0} f_t(\tilde{x})$ по всем p-элементным подмножествам $A_0 \subseteq A$ равно количеству значений параметра c_t, при каждом из которых в целых неотрицательных числах $z_{t,1}, z_{t,2}, \ldots, z_{t,s_t(A)}$ разрешима система

$$\begin{cases} z_{t,1} \cdot c_{t,1}(A) + \ldots + z_{t,s_t(A)} \cdot c_{t,s_t(A)}(A) = c_t \\ z_{t,1} + \ldots + z_{t,s_t(A)} = p \\ 0 \leqslant z_{t,i} \leqslant r_{t,i}(A, p), \; i = \overline{1, s_t(A)}. \end{cases} \tag{1}$$

Поэтому, если $m_t(A, p)$ есть любая верхняя оценка указанного количества, то будет иметь место неравенство $|M(\{F\}, A, p)| \leqslant \prod\limits_{t=1}^{q} m_t(A, p)$. Из-за равенства $|M(\{F\}, A, p)| = |M(\{F\}, A, |A|-p)|$ эти оценки достаточно рассматривать при $0 \leqslant p \leqslant \left\lfloor \frac{|A|}{2} \right\rfloor$. Например, если $s_t(A) = 2$, $t = \overline{1, q}$, то справедлива оценка $|M(\{F\}, A, p)| \leqslant$ $\leqslant \prod\limits_{t=1}^{q} [\min\{\min\{r_{t,1}(A), r_{t,2}(A)\}, p\} + 1]$.

Оценки числа возможных векторов $\Omega(\{F\}, A_0)$ по всем p-элементным подмножествам $A_0 \subseteq A$ предполагает совместное рассмотрение всех систем (1) при $t = \overline{1, q}$, а также возможных соотношений относительно параметров $c_1, \ldots, c_q$. Предположим, что известны соотношения $\varphi_j(c_1, \ldots, c_q) \rho_j 0$, $j = \overline{1, l}$, где ρ_j обозначает один из знаков $>, <, \geqslant, \leqslant, =$. Тогда число возможных векторов $\Omega(\{F\}, A_0)$ не будет превышать числа комбинаций $(c_1, \ldots, c_q)$, доставляющих разрешение в целых неотрицательных числах $z_{1,1}, \ldots, z_{1,s_1(A)}, \ldots, z_{q,1}, \ldots, z_{q,s_q(A)}$ системе

$$\left.\begin{array}{l} z_{t,1} \cdot c_{t,1}(A) + \ldots + z_{t,s_t(A)} \cdot c_{t,s_t(A)}(A) = c_t \\ z_{t,1} + \ldots + z_{t,s_t(A)} = p \\ 0 \leqslant z_{t,i} \leqslant r_{t,i}(A, p), \; i = \overline{1, s_t(A)} \end{array}\right\} t = \overline{1, q} \tag{2}$$
$$\varphi_j(c_1, \ldots, c_q) \rho_j 0, \; j = \overline{1, l}$$

Поэтому, если $m(A, p)$ есть верхняя оценка отмеченного числа комбинаций $(c_1, \ldots, c_q)$, то будем иметь $|M(\{F\}, A, p)| \leqslant m(A, p)$. Например, если $f_1(\bar{x}) = x_1 \cdot \ \ldots \ x_1$, $q = n$, $2^k < p \leqslant 2^{k+1}$, $0 \leqslant k \leqslant n-2$, то только учет недопустимости неравенства $c_{n-1} < c_n$ в условиях разрешимости соответствующей системы (2) приводит к неравенству $|M(\{F\}, E^n, p)| \leqslant \frac{5}{6}(p+1)^{n-k-1}\prod_{i=1}^{k}(2^i+1)$.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ռ. Ե. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

{F}-անջատելի ենթաբազմությունների բերելիությունը և դրանց քանակների գնահատումները վերջավոր բազմություններում

A բազմության A_0 ենթաբազմությունը կոչվում է {F}-անջատելի A-ում, եթե A_0 և A/A_0 ենթաբազմությունները կարելի է տարբերել {F} դասի որևէ ֆունկցիայի դրանցում ունեցած նշաններով։

Դիցուք A-ն և B-ն համապատասխանաբար n և m-չափանի էվկլիդյան տարածությունների վերջավոր բազմություններ են։ Ինչպիսի՞ պայմանների դեպքում և ի՞նչպես են կապված A բազմության ենթաբազմությունների {F}-անջատման հարցերը B բազմության ենթաբազմությունների {H}-անջատման հարցերի հետ։ Ե՞րբ և ի՞նչպես է կարելի A-ում դիտարկվող հարցերը հանգեցնել B-ում համապատասխան հարցերի դիտարկմանը։ Աշխատանքում բերվում է այս հարցերի պատասխանները որոշակի և բավականաչափ ընդհանուր պայմանների դեպքում։ Հաստատված պնդումներն ունեն տեսական և կիրառական որոշակի նշանակություններ։ Դրանք, մասնավորաբար, լայն կիրառություն են գտնում վերջավոր բազմության {F}-անջատելի ենթաբազմությունների քանակի գնահատման հարցում։

Հաստատվում են վերջավոր բազմության գծայնորեն-անջատելի ենթաբազմությունների հետաքրքրություն ներկայացնող հատկություններ։ Նկարագրվում են {F}-անջատելի ենթաբազմությունների քանակի ([1–3]) աշխատանքներում բերված որոշ գնահատականների հետագա լավացման հնարավորությունները։ Ցույց է տրվում, որ այդ խնդիրը բերվում է թվերի սահմանափակումներով տրոհումների խնդիրներին։

Թեորեմ 1-ը հնարավորություն է տալիս {F}-անջատելի ենթաբազմությունների քանակը գնահատել այդ քանակի տեսակետից համարժեք բազմություններից նրանում, որում այդ հարցի լուծումը, որոշ նկատառումներից ելնելով, ավելի հեշտ է իրականացնել։ Այսպես, օրինակ, եթե $S_1, \ldots, S_n$ բազմություններից յուրաքանչյուրը կազմված է վերջավոր թվաբանական պրոգրեսիայի անդամներից, ապա այդ թեորեմից և ([1]) աշխատանքից հետևում է, որ $S_1 \times \cdots \times S_n$ ցանցի p տարր պարունակող գծայնորեն-անջատելի ենթաբազմությունների քանակը չի գերազանցում $\prod_{i=1}^{n}[p(|S_i|-1)+1]$ թվին։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Б. Е. Торосян*, ДАН АрмССР, т. 84, № 2 (1987). 2 *Б. Е. Торосян*, ДАН АрмССР, т. 87, № 4 (1988). [3] *Б. Е. Торосян*. ДАН АрмССР, т. 88, № 1 (1989). [4] *Т. М. Cove* IEEE Trans. on El. Comp., EC—14, № 3 (1965). [5] *В. Н. Вапник*, *А. Я. Червоненкис*, Теория распознавания образов, Наука. М., 1974. [6] *Ю. И. Журавлев*, Проблемы кибернетики, вып. 33, Наука, М., (1978). [7] *М. С. Paull*, *E. J. McCluskey* Proc. IRE, v. 48 (1960). [8] *С. К. Chow*, Proc. IRE, v. 39 (1961). [9] *В. И. Варшавский*, ДАН СССР, т. 139, № 5 (1961). [10] *Л. А. Шоломов*, Проблемы кибернетики вып. 13, Наука, М., (1965). [11] *P. O. Winder*, IEEE Trans. on El. Comp., EC—14 № 2 (1965). [12] *М. Дертоузос*, Пороговая логика, Мир. М. 1967. [13] *Б. Е. Торосян* VI Всесоюзная конференция по проблемам теор. киб., Тезисы докл., г Саратов, 1983.