

УДК 534.833.(26)

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Л. А. Борисов, Ю. М. Чудинов, Ю. А. Гаспарян

Расчет импеданса звукопоглощающей конструкции на основе профилированной пленки

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. Н. Тер-Степаняном 22/XI 1988)

В последнее время для снижения шума стали применяться звукопоглощающие конструкции, выполненные из профилированных упругих пленок (¹⁻⁴), которые могут быть использованы наиболее эффективно в производственных помещениях с высокой влажностью, запыленностью или замасленностью. Одна из причин, сдерживающих внедрение акустической облицовки из профилированной полимерной пленки, заключается в отсутствии простой и надежной методики расчета импеданса и коэффициентов звукопоглощения пленочных конструкций, на основе которой можно было бы как разрабатывать новые эффективные виды поглотителей, так и производить акустический расчет ожидаемого снижения шума в помещениях.

Для более точного решения теоретических задач строительной акустики нами был применен вариационный метод Ритца, сущность которого сводится к определению двойного интеграла типа

$$I(u) = \iint_s F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy, \quad (1)$$

где s — область интегрирования, имеющая границей контур Γ , на котором выполняются граничные условия $U|_{\Gamma} = \varphi(s)$.

Для решения поставленной задачи Ритц предложил задавать решение в параметрическом виде $U|_{\Gamma} = \varphi(x, y, a_1, a_2 \dots a_n)$ так, чтобы при всех значениях параметра a_i удовлетворялись граничные условия. Таким образом, поставленная задача сводится к нахождению параметров a_i , и $\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0$.

При исследовании колебаний тонких пластинок функционалом $I(u)$, имеющим экстремальные свойства, является полная энергия системы $\mathcal{E}$, а функция u , определяемыми из условия экстремума энергии, — перемещение точек упругого тела u . Исходя из принципа возможных перемещений, запишем:

$$\mathcal{E} = U_p(u) - U_k(u) - U_b(u),$$

$$U_p = 0,5D \iint_s \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2(1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy, \quad (2)$$

где U_p , U_k , U_v — соответственно, потенциальная, кинетическая энергия системы и работа внешних сил. Если смещение задано в параметрической форме, то выражение $\frac{\partial I}{\partial a_i}$ перепишется в виде

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_k} = 0; \quad U_k = 0,5\omega^2 M \iint U^2 dx dy; \quad U_v = \iint p u dx dy.$$

Смещение для каждой колебательной моды (m, n) можно записать в виде $U_{mn} = A_{mn} X_m(x) Y_n(y)$, где A_{mn} — постоянные коэффициенты, а $X_m(x)$, $Y_n(y)$ — функции, удовлетворяющие граничным условиям. Здесь и далее временной множитель опускается, поскольку рассматриваются гармонические колебания пластины $X_m(x) = \sin \frac{\pi m x}{a}$; $Y_n(y) = \sin \frac{\pi n y}{a}$.

Различают три основных типа граничных условий: $U|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial y}|_{\Gamma} = 0$. Жестко закрепленная и свободная граница. В этом случае:

$$\left. \begin{aligned} X_m(0) = X_m(a) = Y_n(0) = Y_n(a) = 0 \\ X'_m(0) = X'_m(a) = Y'_n(0) = Y'_n(a) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} X''_m(0) = X''_m(a) = Y''_n(0) = Y''_n(a) = 0 \\ X'''_m(0) = X'''_m(a) = Y'''_n(0) = Y'''_n(a) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Шарнирно закрепленная граница:

$$U|_{\Gamma} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{\Gamma} = 0;$$

$$\left. \begin{aligned} X_m(0) = X_m(a) = Y_n(0) = Y_n(a) = 0 \\ X'_m(0) = X'_m(a) = Y'_n(0) = Y'_n(a) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{\Gamma} = U|_{\Gamma} = 0. \quad (4)$$

Очевидно, что функции $U_{mn}(x, y) = A_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{a}$ удовлетворяют граничным условиям (4), более того, они являются собственными функциями задачи. Таким образом, в данном случае можно получить точное решение поставленной задачи. Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A_{mn}} = 0,25 \left\{ D \left[\pi^2 a^{-1} (m^2 + n^2) \right]^2 - (\omega a)^2 M \right\} - \frac{P}{mn} \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 = 0, \quad D = D_0 (1 + \eta),$$

где D — изгибная жесткость пластинки со стороной a , η — коэффициент потерь, $A_{mn} = 16P \left\{ mn \left[D \left(\frac{\pi^2}{a^2} \right)^2 (m^2 + n^2) - (\omega \pi)^2 M \right] \right\}^{-1/2}$

$$\bar{v} = \frac{j\omega}{a^2} \int_0^a \int_0^a A_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{a} dx dy = \frac{4j A_{mn} \omega}{\pi^2 mn}$$

Отсюда сразу же следует, что при данных граничных условиях в квадратной пластинке могут возбуждаться лишь нечетные колебательные моды. Используя метод Рунга, с помощью уравнений (2), учитывая

также, что при определении импеданса используют усредненную по поверхности пластинки колебательную скорость, непосредственно получим аналитическое выражение для импеданса колебательной моды (m, n)

$$Z = \left(\frac{\pi^4}{8a^2} \right)^2 [(m^2 + n^2)mn]^2 \left(\frac{D\eta_1}{\omega} \right) + j \left(\frac{\pi^2 mn}{8} \right)^2 \left[\omega M - \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 (m^2 + n^2)^2 \left(\frac{D}{\omega} \right) \right].$$

Из этого выражения, приравнявая нулю мнимую часть, получим резонансную частоту $\omega_{mn} = (m^2 + n^2) \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{D}{M} \right)^{1/2}$

Перейдем к рассмотрению гораздо более сложного случая: определим импеданс пластинки с жестко закрепленной границей. Наиболее просто решение получается, если использовать тригонометрические функции, удовлетворяющие граничным условиям (3). Очевидно, что функция $U_{mn}(X, Y) = A_{mn} \sin^2 \frac{\pi m x}{a} \sin^2 \frac{\pi n y}{a}$ отвечает этим требованиям. Подставляя это выражение в формулы для энергии, получим:

$$U_p = 0,5 D A_{mn}^2 [I_{mn} I_{2n} + I_{1n} I_{2m} + 2\sigma I_{3n} I_{3m} + 2(1 - \sigma) I_{4n} I_{4m}];$$

$$U_k = 0,5 (\omega A_{mn})^2 M I_{2n} I_{2m}; \quad U_B = P A_{mn} I_{1m} I_{1n}; \quad I_1 = \int_0^a (x'')^2 dx;$$

$$I_2 = \int_0^a x^2 dx; \quad I_3 = \int_0^a x'' dx; \quad I_4 = \int_0^a (x')^2 dx; \quad I_5 = \int_0^a x dx; \quad (6)$$

$$I_{1m} = \int_0^a (x'_m) dx; \quad I_{2m} = \int_0^a x_m^2 dx; \quad I_{3m} = \int_0^a x''_m dx; \quad I_{5m} = \int_0^a x_m dx; \quad (7)$$

где σ — коэффициент Пуассона; M — масса единицы площади пластины; P — звуковое давление; ω — циклическая частота;

$$U_p = \frac{D}{8} \left(\frac{\pi A_{mn}}{a} \right)^2 [2(m^4 + n^4) + (m^2 + n^2)^2]; \quad U_k = \frac{9M}{128} (\omega a A_{mn})^2;$$

$$U_B = 0,25 P a^2 A_{mn}; \quad (8)$$

a — линейный размер пластины.

Произведя интегрирование, получим для импеданса

$$Z_{mn} = \frac{4D'\eta_1}{\omega} \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 [2(m^4 + n^4) + (m^2 + n^2)^2] + j \left\{ \frac{9\omega M}{4} - \frac{4D}{\omega} \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 [2(m^4 + n^4) + (m^2 + n^2)^2] \right\};$$

$$D = \frac{S^2}{B_{mn}} \left(\bar{C}_{mn} \omega_p^2 S - \frac{c}{l} \right); \quad \eta_1 = \frac{\dot{Z}_{mn}}{B_{mn}} \frac{\omega_p S^2}{D} = \frac{\omega_p R S^2}{B_{mn} D}. \quad (9)$$

Отсюда получим выражение для резонансной частоты пластинки с жестко закрепленными краями, которая имеет вид

$$\omega_{mn} = \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 (m^2 + n^2) \left[\frac{2(m^4 + n^4)}{(m^2 + n^2)^2} + 1 \right]^{1/2} \frac{4}{3} \left(\frac{D}{M} \right)^{1/2};$$

$$\omega_{11p} = 37,22/a^2 \left(\frac{D}{M} \right)^{1/2}; \quad \omega_{11k} = 36,26/a^2 \left(\frac{D}{M} \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Нетрудно установить, что резонансная частота данной колебательной моды (m, n) пластинки с жестко закрепленной границей в $\frac{4}{3} \left| \frac{2(m^4 + n^4)}{(m^2 + n^2)^2} + 1 \right|^{1/2}$ раз выше резонансной частоты пластинки с шарнирно закрепленными краями.

Полученные аналитические выражения для импеданса пластинки (5) и (9) можно записать в общем виде и с учетом импеданса воздушного промежутка, который имеет реактивный характер:

$$Z_{mn} = \frac{B_{mn} D \eta}{\omega S^2} + j \left[\omega_{mn} M C_{mn} - \frac{B_{mn} D}{\omega_{mn} S^2} - \rho c \operatorname{ctg} kl \right], \quad (11)$$

где S — площадь пластинки, а B_{mn} и C_{mn} — постоянные коэффициенты, зависящие от формы пластины и от вида граничных условий.

При акустических расчетах принято выражать импеданс в долях ρc . Вводя обозначения $\bar{Z}_{mn} = Z_{mn}/\rho c$; $\bar{B}_{mn} = B_{mn}/\rho c$, перепишем выражение (11) в виде

$$\bar{Z}_{mn} = \frac{\bar{B}_{mn} D \eta}{\omega_{mn} S^2} + j \left[\omega_{mn} M \bar{C}_{mn} - \frac{\bar{B}_{mn} D}{\omega S^2} - \operatorname{ctg} kl \right]; \quad \operatorname{ctg} kl = \frac{c l^{-1}}{\omega_{mn}}. \quad (12)$$

Формулу (9) можно упростить, учитывая, что во многих практически важных случаях, когда относ невелик ($kl \leq 0,3$), $\operatorname{ctg} kl \approx (kl)^{-1}$.

Импеданс круглой пластинки с жестко закрепленной кромкой равен:

$$\text{при} \quad U_p = \pi D \int_0^R \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 r dr \quad U_k = \pi \omega^2 M \int_0^R U^2 r dr;$$

$$Z = \frac{D \eta}{\omega} \frac{205,6}{R^4} + j \left(1,95 \omega M - \frac{205,6 D}{\omega R^4} \right); \quad \omega = \frac{10,33}{R^2} \left(\frac{D}{M} \right)^{1/2}.$$

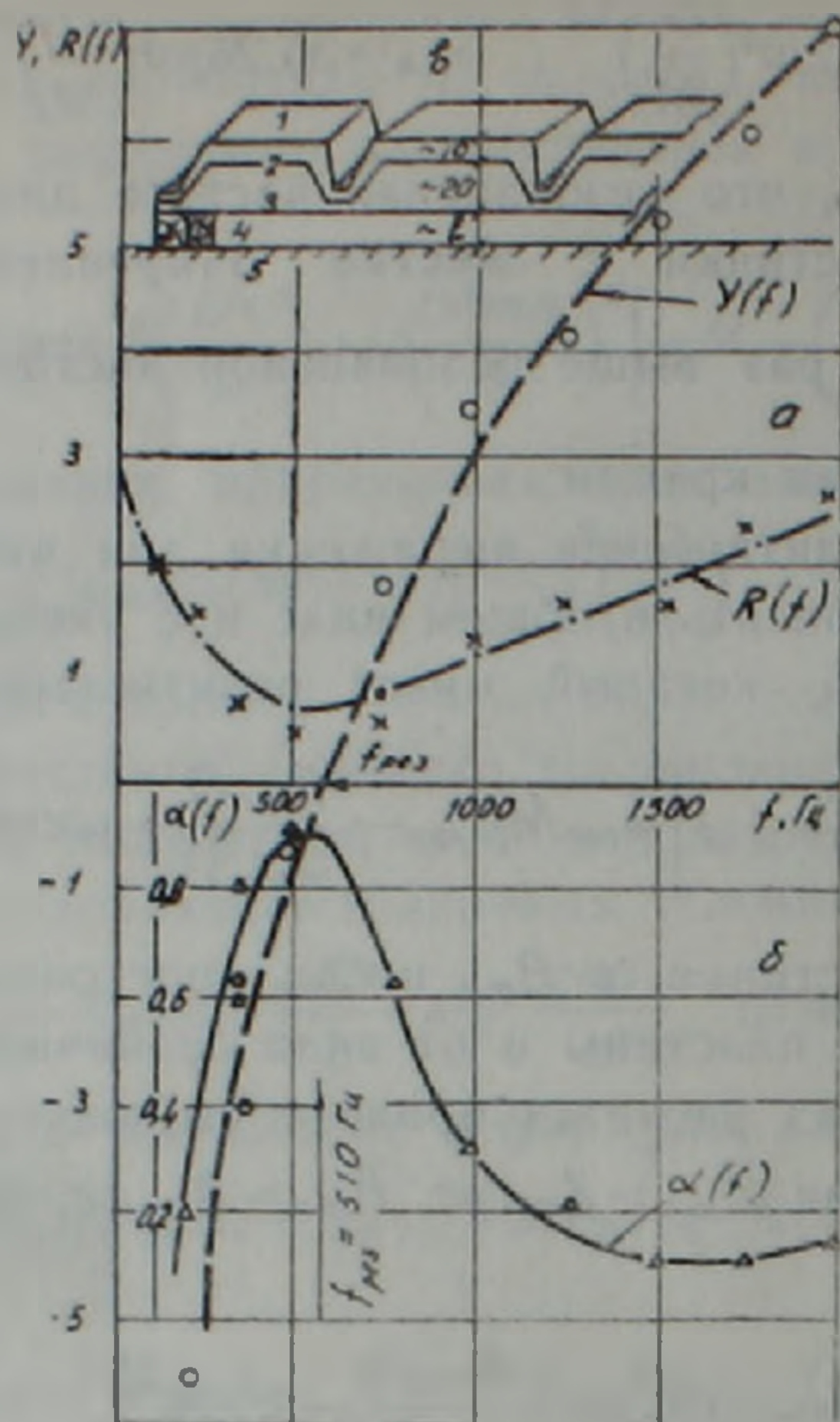
При небольших отношениях нетрудно получить аналитическое выражение для резонансной частоты пластины на основе профилированной пленки:

$$\omega_{mn}^{\text{рез}} = \frac{D}{M S^2} \frac{\bar{B}_{mn}}{C_{mn}} + \frac{c}{M l C_{mn}}; \quad \bar{C}_{mn} = (\pi^2 m n)^2 / 64$$

$$\bar{B}_{mn} = \pi^8 (mn)(m^2 + n^2)^2 / 64 \quad (16)$$

Введенные выше формулы могут быть положены в основу метода расчета акустических характеристик поглотителей из профилированной пленки — импеданса $Z(f) = R(f) + jY(f)$ и КЗП $\alpha(f)$.

В качестве примера на рисунке показаны полученные расчетом по формулам (13) и (14) составляющие импеданса $R(f)$, $Y(f)$ и резонансная частота звукопоглощающей конструкции на основе профилированной пленки ПВХ толщиной $4,2 \cdot 10^{-2}$ см, поверхностной массы $5,35 \cdot 10^{-3}$ г/см², расположенной на отстоях от жесткой стенки в 3 см.



Импедансная (а) и частотная (б) характеристика звукопоглощающей конструкции (в) на основе профилированной пленки из ПВХ: 1 и 2—штамповочная пленка высотой 10 и 20 см; 3—гладкое пленочное покрытие на расстоянии l от жесткой стены; 4—деревянный брусок, 5—жесткая стенка

Линиями показаны результаты расчета, точками—результаты эксперимента, выполненного на акустическом интерферометре. При этом получено удовлетворительное совпадение рассчитанных и измеренных значений резонансных частот пленочных поглотителей звука.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса
НИИ стройфизики
Госстроя СССР

Լ. Ա. ՌՈՐԻՍՈՎ, ՅՈՒ. Մ. ՉՈՒԴԻՆՈՎ, ՅՈՒ. Ա. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

Պրոֆիլավորված թերթերով ձայնակլանիչ կոնստրուկցիայի
իմպեդանսի հաշվարկը

Վարիացիայի մեթոդի հիման վրա, առաջարկված է պոլիմերային պրոֆիլավորված թերթերով ձայնակլանիչ կոնստրուկցիայի հիմնական ափսոսելի պարամետրերի հաշվարկը:

Ռիտցի մեթոդի օգնությամբ ստացվել է բառակուսի թիթեղիկի տար-

բիւր եղբայրն սլաշմաններում իմպիդանսի անալիտիկ արտահայտութիւնը:
Առաջարկված մեթոդը կարող է հիմք ծառայել ինժեներային հաշիւարկ-
ների համար և նախադժելու տարրեր պոլիմերային թերթերով ձայնակլանի:
Էոնսորուկցիաներ:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 Ю. М. Чудинов, Т. П. Борисова, Труды НИИ СФ «Защита от шума в зданиях и на территории застройки». М., с 27—30, 1987. 2 Снижение шума в зданиях и жилых районах. Под ред. Г. М. Осипова, Стройиздат, М., 1987. 3 N. Klesewetter Acustica, v. 61, p 213—217 (1986). 4 F. Michel, N Klesewetter, Acustica, v. 47, p 83—88 (1981).