ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Том 88 1989 №5

УДК 539.3.01

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. А. Агаловян, Г. Г. Хачатрян

Об асимптотическом методе решения краевых задач теории упругости для неклассических областей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 2/II 1989)

1. Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния анизотропной полосы $\Omega=\{(x, y): x\in[0, a], -\varphi_2(x)\leqslant y\leqslant\varphi_1(x), h=\max\{\sup|\varphi_1(x)|, \sup|\varphi_2(x)|\}$ сложного очертания. Указанная неклассическая область, в частности, может иметь очертания крыла самолета или других конструктивных элементов летательных аппаратов. Продольные кромки полосы описываются произвольными кусочно-гладкими функциями $y=\varphi_i(x)$, $i=1, 2$. При $y=\varphi_1(x)$ заданы компоненты внешней нагрузки X_+, Y_+, а при $y=-\varphi_2(x)$—значения компонентов вектора перемещения u^-, v^-. На поперечных кромках могут быть заданы произвольные условия краевых задач теории упругости. Считается, что полоса находится в условиях плоской задачи теории упругости и в плоскости полосы—анизотропия самая общая. Рассмотренные задачи моделируют также взаимодействие упругого основания неклассической формы с фундаментом.

В уравнениях задачи теории упругости, если переходить к безразмерным переменным $\xi=x/a$, $\zeta=y/h$, получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon=h/a$ систему. Для эффективного решения этой системы используется асимптотический метод [1-3]. Решение складывается из решений внутренней задачи и погранслоев. В рассматриваемых задачах главенствующую роль играет решение внутренней задачи, погранслои же описывают краевые эффекты при поперечных кромках и непосредственно не влияют на решение внутренней задачи.

Решение внутренней задачи ищем в виде [1]

$$Q=\sum_{(s)}\varepsilon^{\chi_Q+s}Q^{(s)}(\xi, \zeta), \quad \chi_{u,v}=0, \quad \chi_\sigma=-1. \tag{1.1}$$

По обычной для асимптотического метода процедуре для коэффициентов $Q^{(s)}$ разложения (1.1) можно получить

$$\begin{gathered}\sigma_x^{(s)}=\sigma_{x0}^{(s)}(\xi)+\sigma_x^{*(s)}(\xi, \zeta), \ (x, y), \ \sigma_{xy}^{(s)}=\sigma_{xy0}^{(s)}+\sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, \zeta);\\ \sigma_{x0}^{(s)}=-(a_{12}\sigma_{y0}^{(s)}+a_{16}\sigma_{xy0}^{(s)})a_{11}^{-1};\\ U^{(s)}=(A_{16}\sigma_{y0}^{(s)}+A_{66}\sigma_{xy0}^{(s)})\zeta+u_0^{(s)}(\xi)+u^{*(s)}(\xi, \zeta);\\ V^{(s)}=(A_{11}\sigma_{y0}^{(s)}+A_{16}\sigma_{xy0}^{(s)})\zeta+v_0^{(s)}(\xi)+v^{*(s)}(\xi, \zeta),\end{gathered} \tag{1.2}$$

где

$$\sigma_{xy}^{*(s)}=-\int_0^{\zeta}\frac{\partial\sigma_x^{(s-1)}}{\partial\xi}d\zeta,\quad \sigma_y^{*(s)}=-\int_0^{\zeta}\frac{\partial\sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial\xi}d\zeta;$$

$$\sigma_x^{*(s)}=-(a_{12}\sigma_y^{*(s)}+a_{16}\sigma_{xy}^{*(s)})a_{11}^{-1}+a_{11}^{-1}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi};$$

$$u^{*(s)}=\int_0^{\zeta}\left[a_{16}\sigma_x^{*(s)}+a_{26}\sigma_y^{*(s)}+a_{66}\sigma_{xy}^{*(s)}-\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial\xi}\right]d\zeta; \tag{1.3}$$

$$v^{*(s)}=\int_0^{\zeta}[a_{12}\sigma_x^{*(s)}+a_{22}\sigma_y^{*(s)}+a_{26}\sigma_{xy}^{*(s)}]d\zeta;$$

$$A_{11}=(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)a_{11}^{-1},\quad A_{16}=(a_{11}a_{26}-a_{12}a_{16})a_{11}^{-1},\quad A_{66}=(a_{11}a_{66}-a_{16}^2)a_{11}^{-1}.$$

Решение (1.1), (1.2) содержит четыре неизвестные функции $\sigma_{xy0}^{(s)}(\xi)$, $\sigma_{y0}^{(s)}(\xi)$, $u_0^{(s)}(\xi)$, $v_0^{(s)}(\xi)$, которые определяются из условий при $y=\varphi_1$ и $y=\varphi_2$. Удовлетворив этим условиям, получим

$$\sigma_{xy0}^{(s)}(\xi)=Q_{10}^{(s)}+Q_{11}\sigma_x^{*(s)}(\xi,\zeta_1)+Q_{12}\sigma_y^{*(s)}(\xi,\zeta_1)-Q_{13}\sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,\zeta_1);$$

$$\sigma_{y0}^{(s)}(\xi)=Q_{20}^{(s)}+Q_{21}\sigma_x^{*(s)}(\xi,\zeta_1)-Q_{22}\sigma_y^{*(s)}(\xi,\zeta_1)+Q_{23}\sigma_{xy}^{*(s)}(\xi,\zeta_1);$$

$$\sigma_{x0}^{(s)}(\xi)=-[a_{12}\sigma_{y0}^{(s)}+a_{16}\sigma_{xy0}^{(s)}]a_{11}^{-1},\quad \zeta_1=\varphi_1/h; \tag{1.4}$$

$$u_0^{(s)}=[A_{16}\sigma_{y0}^{(s)}+A_{66}\sigma_{xy0}^{(s)}]\zeta_2-u^{*(s)}(\xi,-\zeta_2),\quad \zeta_2=\varphi_2/h;$$

$$v_0^{(s)}=[A_{11}\sigma_{y0}^{(s)}+A_{16}\sigma_{xy0}^{(s)}]\zeta_2-v^{*(s)}(\xi,-\zeta_2);$$

$$Q_{10}^{(s)}=\frac{1}{Q_0}\left[f_1^{(s)}-\frac{a_{12}}{a_{11}}\psi_1f_2^{(s)}\right]\sqrt{1+\psi_1^2},\quad \psi_1=\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi},$$

$$Q_0=\left[1+\frac{a_{16}}{a_{11}}\psi_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}\psi_1^2\right],\quad Q_{11}=\frac{1}{Q_0}\psi_1,$$

$$Q_{12}=\frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\psi_1}{Q_0},\quad Q_{13}=\frac{1}{Q_0}\left(1+\frac{a_{12}}{a_{11}}\psi_1^2\right),\quad Q_{21}=\frac{\psi_1^2}{Q_0},$$

$$Q_{22}=\frac{1}{Q_0}\left(1+\frac{a_{16}}{a_{11}}\psi_1\right),\quad Q_{23}=\frac{a_{16}}{a_{11}}\frac{\psi_1^2}{Q_0},$$

$$Q_{20}^{(s)}=\frac{1}{Q_0}\left[\psi_1f_1^{(s)}+\left(1+\frac{a_{16}}{a_{11}}\psi_1\right)f_2^{(s)}\right]\sqrt{1+\psi_1^2},$$

$$X_v=\varepsilon^{-1}f_1,\quad Y_v=\varepsilon^{-1}f_2,\quad f_i^{(0)}=f_i,\quad f_i^{(s)}=0,\ (1,2),\ s>0.$$

Формулы (1.1)—(1.4) позволяют получить решение задачи с любой наперед заданной асимптотической точностью.

2. Если уравнения продольных кромок и внешние воздействия, входящие в граничные условия, при $y=\varphi_1$, $-\varphi_2$ описываются полиномиальными функциями, то, как правило, получается замкнутое решение. Приведем его для некоторых случаев.

а) На верхнюю грань с уравнением $y=k_1x+h_1$ действует произвольная внешняя нагрузка постоянной интенсивности $X_v=\text{const}$,

$Y_\nu = \text{const}$, а нижняя плоская грань $y = h_2$ жестко защемлена ($u^- = v^- = 0$). Решением задачи является

$$\sigma_{xy} = \left(X_\nu - \frac{a_{12}}{a_{11}} k_1 Y_\nu \right) \Delta, \quad \Delta = \frac{\sqrt{1 + k_1^2}}{1 + k_1 a_{16}/a_{11} + k_1^2 a_{12}/a_{11}}.$$

$$\sigma_y = \left[k_1 X_\nu + \left(1 + \frac{a_{16}}{a_{11}} k_1 \right) Y_\nu \right] \Delta;$$

$$\sigma_x = -[(a_{16} + k_1 a_{12}) X_\nu + a_{12} Y_\nu] \Delta / a_{11}; \tag{2.1}$$

$$u = \left\{ (A_{16} k_1 + A_{66}) X_\nu + \left[A_{16} \left(1 + \frac{a_{16}}{a_{11}} k_1 \right) - A_{66} \frac{a_{12}}{a_{11}} k_1 \right] Y_\nu \right\} (y + h_2) \Delta;$$

$$v = \left\{ (A_{11} k_1 + A_{16}) X_\nu + \left[A_{11} \left(1 + \frac{a_{16}}{a_{11}} k_1 \right) - A_{16} \frac{a_{12}}{a_{11}} k_1 \right] Y_\nu \right\} (y + h_2) \Delta.$$

Для ортотропной пластинки $a_{16} = A_{16} = 0$, $A_{66} = 1/G$.

Из решения (2.1) вытекают решения, соответствующие часто встречающимся нагрузкам. Например, если α—угол наклона крыла к горизонту и нормально к крылу действует нагрузка постоянной интенсивности q, для получения решения следует в (2.1) подставить $X_\nu = q \sin\alpha$, $Y_\nu = -q\cos\alpha$.

б) На плоскую грань пластинки $y = h_1 = \text{const}$ действует нагрузка с постоянными компонентами X_ν, Y_ν, а грань $y = -k_2 x - h_2$ жестко защемлена ($u^- = v^- = 0$). Решением задачи является

$$\sigma_{xy} = X_\nu, \quad \sigma_y = Y_\nu.$$

$$\sigma_x = \left\{ -(a_{16} X_\nu + a_{12} Y_\nu) + (A_{66} X_\nu + A_{16} Y_\nu) k_2 + \right.$$

$$\left. + k_2^2 \left[\left(A_{66} \frac{a_{16}}{a_{11}} - A_{16} \right) X_\nu + \left(A_{16} \frac{a_{16}}{a_{11}} - A_{11} \right) Y_\nu \right] \right\} a_{11}^{-1};$$

$$u = \left\{ A_{66} X_\nu + A_{16} Y_\nu + k_2 \left[\left(A_{66} \frac{a_{16}}{a_{11}} - A_{16} \right) X_\nu + \right. \right. \tag{2.2}$$

$$\left. + \left(A_{16} \frac{a_{16}}{a_{11}} - A_{11} \right) Y_\nu \right] + \frac{a_{16}}{a_{11}} \left[\left(A_{66} \frac{a_{16}}{a_{16}} - A_{16} \right) Y_\nu + \right.$$

$$\left. \left. + \left(A_{16} \frac{a_{16}}{a_{15}} - A_{11} \right) Y_\nu \right] k^2 - \frac{a_{12}}{a_{11}} (A_{66} X_\nu + A_{16} Y_\nu) k_2^2 \right\} (y + k_2 x + h_2);$$

$$v = \left\{ A_{16} X_\nu + A_{11} Y_\nu + \frac{a_{12}}{a_{11}} (A_{66} X_\nu + A_{16} Y_\nu) k_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{a_{12}}{a_{11}} \left[\left(A_{66} \frac{a_{16}}{a_{11}} - A_{16} \right) X_\nu + \left(\frac{a_{16}}{a_{11}} A_{16} - A_{11} \right) Y_\nu \right] k_2^2 \right\} (y + k_2 x + h_2),$$

в частности, для изотропной пластинки имеем

$$\sigma_x = \frac{E}{G} k_2 X_\nu + [\nu - (1 - \nu^2) k_2^2] Y_\nu, \quad \sigma_y = Y_\nu, \quad \sigma_{xy} = X_\nu,$$

$$u = \left\{ \frac{1}{G} (1 + \nu k_2^2) X_\nu - \frac{1 - \nu^2}{E} k_2 Y_\nu \right\} (y + k_2 x + h_2); \tag{2.3}$$

$$v=\left\{-\frac{\nu}{G}k_2X_\nu+\frac{1-\nu^2}{F}(1+\nu k_2^2)Y_\nu\right\}(y+k_2x+h_2).$$

В заключение отметим, что предложенным методом можно получить решения и для более сложных случаев, а также для анизотропных пластинок переменной толщины в пространственной постановке.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Լ. Ա. ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ, Գ. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Ոչ դասական տիրույթների համար առաձգականության տեսության եզրային խնդիրների լուծման ասիմպտոտիկ մեթոդի մասին

Դիտարկվում է բարդ եզրագիծ ունեցող անիզոտրոպ շերտի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման հարցը։ Շերտի երկայնական եզրագծերը բնութագրվում են կամայական կտոր-առ-կտոր ողորկ ֆունկցիաներով, նրանցից մեկի վրա տրված են արտաքին բեռի բաղադրիչները, իսկ մյուսի վրա տեղափոխման վեկտորը։ Նշված տիրույթները կարող են մոդելավորել թաղող սարքերի առանձին կոնստրուկտիվ տարրեր, իսկ դիտարկված խնդիրները նաև՝ ոչդասական ձևի առաձգական հիմնատակի և հիմքի փոխազդեցությունը։

Ցույց է տրված սինգուլյար գրգռված դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման ասիմպտոտիկ մեթոդի էֆեկտիվությունը նշված դասի խնդիրների լուծման համար։ Ստացված է լուծում, որը հնարավորություն է տալիս որոշել լարման և տեղափոխման բոլոր բաղադրիչները՝ նախապես տրված ցանկացած ասիմպտոտիկ ճշտությամբ։ Նշվում են այն դեպքերը, երբ ստացվում են փակ տեսքով լուծումներ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Агаловян*, Межвузовский сб. «Механика», изд. ЕГУ, вып. 2. (1982). [2] *Л. А. Агаловян, Р. С. Геворкян*, ПММ, т. 50, вып. 2, 1986. [3] *А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов*, Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, Наука, М., 1973