ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 88 1989 №4

УДК 536.24

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

Периодическое течение тепла в полом шаре, заполненном хорошо перемешиваемой жидкостью

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Б. Нерсесяном 7/II 1989)

1. *Постановка задачи и построение решения.* В работе рассматривается задача периодического течения тепла в полом шаре, заполненном хорошо перемешиваемой жидкостью, когда на внешней поверхности сферы происходит теплообмен по закону Ньютона совместно с излучением. Предполагаем, что внутри сферического тела и в жидкости действуют источники тепла с периодически изменяющейся интенсивностью. Функция распределения температуры $U(r, t)$ в сферической области $(R_1<r<R_2)$ удовлетворяет уравнению [1]

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{a}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{c\rho}w(r, t), \tag{1.1}$$

условиям на поверхности контакта с хорошо перемешиваемой жидкостью [2] и на внешней поверхности [3, 4], а также условию периодичности

$$-4\lambda\pi R_1^2\frac{\partial U}{\partial r}\bigg|_{r=R_1}+M_1c_1\frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{r=R_1}-Q(t)=0;$$
$$\frac{\partial U}{\partial r}\bigg|_{r=R_2}=h[S(t)-U(R_2, t)]+\frac{\varepsilon\sigma}{\lambda}[S^4(t)-U^4(R_2, t];\ U(r, t+\theta)=U(r, t). \tag{1.2}$$

Здесь $a=\frac{\lambda}{c\rho}$ — коэффициент температуропроводности сферы, λ — коэффициент теплопроводности, ρ — плотность, c — теплоемкость, $w(r, t)$ — интенсивность источника тепла, M_1, c_1 — соответственно масса жидкости и ее теплоемкость, $Q(t)$ — количество выделяемого в жидкость тепла в единицу времени, h — коэффициент теплообмена, $S(t)$ — температура окружающей среды, ε — степень черноты поверхности, σ — постоянная Стефана—Больцмана, равная [5] $\sigma=5{,}775\cdot10^{-12}$ Вт/см^{2}град^4, θ — период изменения $U(r, t)$. Относительно функции $S(t)$ предполагаем, что она непрерывна и обладает производной с ограниченной вариацией в интервале $(0, \theta)$, а $w(r, t)$ и $Q(t)$ имеют ограниченную вариацию. Применяя к $U(r, t)$ конечное комплексное преобразование Фурье по времени t, для изображения функции $U(r, t)$ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$i\gamma_k U_k(r)=a\left[U_k''(r)+\frac{2}{r}U_k'(r)\right]+\frac{1}{c\rho}w_k(r), \tag{1.3}$$

где $U_k(r)=\int\limits_0^\theta U(r,t)\exp(-i\gamma_k t)dt$; $w_k(r)=\int\limits_0^\theta w(r,t)\exp(-i\gamma_k t)dt$; $\gamma_k=$ $=\frac{2k\pi}{\theta}$. Согласно формуле обращения, $U(r,t)=\frac{1}{\theta}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}U_k(r)\exp(i\gamma_k t)$. Решая уравнение (1.3) и удовлетворяя первому из условий (1.2), получим

$$U_k(r)=\frac{1}{rD_k(R_2)}\left\{D_k(r)\left|R_2C_k+\frac{1}{\lambda\beta_k}\int\limits_r^{R_2}r_1w_k(r_1)\operatorname{sh}\beta_k(R_2-r_1)dr_1\right|+\right.$$

$$\left.+\operatorname{sh}\beta_k(R_2-r)\left|\frac{1}{\lambda\beta_k}\int\limits_{r_1}^{r}r_1w_k(r_1)D_k(r_1)dr_1+Q_k\right|\right\} \tag{1.4}$$

$$U_0(r)=C_0+\frac{1}{\lambda rR_2}\left|r\int\limits_r^{R_2}r_1(R_2-r_1)w_0(r_1)dr_1+(R_2-r)\left(\int\limits_{R_1}^{r}r_1^2w_0(r_1)dr_1+\frac{Q_0}{4\pi}\right)\right|.$$

Здесь $D_k(r)=4\lambda\pi\beta_kR_1\operatorname{ch}\beta_k(r-R_1)+\left(4\lambda\pi+\frac{i\gamma_kM_1c_1}{R_1}\right)\operatorname{sh}\beta_k(r-R_1)$; $Q_k=$

$$=\int\limits_0^\theta Q(t)\exp(-i\gamma_k t)dt;\quad \beta_k=\sqrt{\frac{i\gamma_k}{a}}.$$

Прежде чем удовлетворить второму из условий (1.2), обозначим $\int\limits_0^\theta U^2(R_2,t)\exp(-i\gamma_k t)dt=N_k$. Выполняя второе из условий (1.2), будем иметь

$$C_k[R_2D_k'(R_2)+(hR_2-1)D_k(R_2)]=R_2D_k(R_2)\left|-\frac{\varepsilon\sigma}{\theta\lambda}\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}N_jN_{k-j}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^\theta\left(hS(t)+\frac{\varepsilon\sigma}{\lambda}S^4(t)\right)\exp(-i\gamma_k t)dt\right|+\frac{1}{\lambda}\int\limits_{R_1}^{R_2}rw_k(r)D_k(r)dr+\beta_kQ_k;\quad C_0h=$$

$$=-\frac{\varepsilon\sigma}{\theta\lambda}\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}N_jN_{-j}+\int\limits_0^\theta\left|hS(t)+\frac{\varepsilon\sigma}{\lambda}S^4(t)\right|dt+\frac{1}{\lambda R_2^2}\left|\int\limits_{R_1}^{R_2}r^2w_0(r)dr+\frac{Q_0}{4\pi}\right|. \tag{1.5}$$

В свою очередь, N_k определятся из следующих уравнений:

$$N_k=\frac{1}{\theta}\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}C_jC_{k-j} \tag{1.6}$$

Таким образом, для определения C_k и N_k получили совокупность бесконечных систем нелинейных алгебраических уравнений (1.5) и (1.6). Перед тем, как исследовать эти системы, получим условия разрешимости одного класса систем нелинейных алгебраических уравнений.

2. *К решению одной бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений.* Пусть имеем бесконечную систему

$$m_k = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{k,j,l} m_j m_l + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{k,j} m_j + p_k. \tag{2.1}$$

Рассмотрим, наряду с (2.1), мажорантную систему

$$M_k = |\varepsilon| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,j,l} M_j M_l + \sum_{j=1}^{\infty} b_{k,j} M_j + P_k, \tag{2.2}$$

где

$$|\alpha_{k,j,l}| \leqslant a_{k,j,l}; \quad |\beta_{k,j}| \leqslant b_{k,j}; \quad |p_k| \leqslant P_k. \tag{2.3}$$

Известно ([6]), что если система (2.2) имеет неотрицательное решение M_k, то система (2.1) имеет решение m_k^* (главное, т. е. решение, полученное методом последовательных приближений, начиная от нулевых значений), удовлетворяющее условию $|m_k^*| \leqslant M_k'$, а если M_k^* есть главное решение системы (2.2), то решение m_k системы (2.1), удовлетворяющее условию $|m_k| \leqslant M_k^*$, единственно. Перейдем к условиям существования неотрицательного решения системы (2.2). Предположим, что суммы коэффициентов $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,j,l} = a_k$ и $\sum_{j=1}^{\infty} b_{k,j} = b_k$ ограничены в своей совокупности, а также ограничены свободные члены P_k. Обозначим $\sup_k a_k = a$, $\sup_k b_k = b$, $\sup_k P_k = P$. Предположим также, что

$$b < 1; \quad (1-b)^2 - 4|\varepsilon| a P = \rho > 0. \tag{2.4}$$

Возьмем постоянную $K = \dfrac{1-b}{2|\varepsilon| a}$ такую, что $P_k \leqslant K(1 - b_k - |\varepsilon| K a_k)$.

Тогда система

$$M_k' = |\varepsilon| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,j,l} M_j' M_l' + \sum_{j=1}^{\infty} b_{k,j} M_j' + K(1 - b_k - |\varepsilon| K a_k) \tag{2.5}$$

будет мажорантной для (2.2). Система (2.5) имеет очевидное решение $K = |\varepsilon| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,j,l} K^2 + \sum_{j=1}^{\infty} b_{k,j} K + K(1 - b_k - |\varepsilon| K a_k)$ и, следовательно, система (2.2) имеет неотрицательное главное решение $M_k^* \leqslant K$. Введем, далее, понятие устойчивого решения. Назовем устойчивым решением $\underline{M_k} \geqslant 0$ ту ветвь решений системы (2.2), которая остается ограниченной при стремлении ε к нулю. Получим вначале оценку для устойчивого решения системы (2.2). Обозначим через $\underline{M} > 0$ точную верхнюю границу $\underline{M_k}$. Из (2.2) будем иметь

$$\underline{M_k} \leqslant |\varepsilon| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,j,l} \underline{M}^2 + \sum_{j=1}^{\infty} b_{k,j} \underline{M} + P_k \leqslant |\varepsilon| a \underline{M}^2 + b \underline{M} + P, \tag{2.6}$$

а следовательно, $\underline{M} \leqslant |\varepsilon| a \underline{M}^2 + b \underline{M} + P$. Учитывая (2.4), получим

$$\underline{M} \leqslant \frac{2P}{1 - b + \sqrt{\rho}}. \tag{2.7}$$

Исследуем вопрос единственности устойчивого решения системы (2.2). Предварительно покажем, что $\underline{M}_k - M_k^* \geqslant 0$. Применим процесс последовательных приближений к $\underline{M}_k^*$, начиная от нулевых значений $M_k^{(0)}=0$, причем легко видеть, что $M_k^{(n)}$ монотонно возрастают с увеличением n. В самом деле, $M_k^{(1)} = P_k \geqslant M_k^{(0)}$. Предполагая, что $M_k^{(n)} \geqslant M_k^{(n-1)}$, получаем

$$M_k^{(n+1)} = |\varepsilon| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=l}^{\infty} a_{k,j,l} M_j^{(n)} M_l^{(n)} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{k,j} M_j^{(n)} + P_k \geqslant$$

$$\geqslant |\varepsilon| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,j,l} M_j^{(n-1)} M_l^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{k,j} M_j^{(n-1)} + P_k = M_k^{(n)}.$$

Аналогично имеем $\underline{M}_k - M_k^{(0)} = \underline{M}_k \geqslant 0$. По индукции получим

$$\underline{M}_k - M_k^{(n+1)} = |\varepsilon| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,j,l} [\underline{M}_j (\underline{M}_l - M_l^{(n)}) + (\underline{M}_j - M_j^{(n)}) M_l^{(n)}] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} b_{k,j} (\underline{M}_j - M_j^{(n)}) \geqslant 0.$$

Устремляя n к бесконечности, имеем $\underline{M}_k - M_k^* \geqslant 0$, т. е. главное решение M_k^* также устойчиво. Обозначив далее $M_k^* = \underline{M}_k - r_k$, где $r_k \geqslant 0$ должно быть ограниченным, для определения r_k получим систему уравнений

$$r_k = -|\varepsilon| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{k,j,l} r_j r_l + \sum_{j=1}^{\infty} \left[b_{k,j} + |\varepsilon| \sum_{l=1}^{\infty} (a_{k,j,l} + a_{k,l,j}) \underline{M}_l \right] r_j,$$

откуда

$$r_k \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left[b_{k,j} + |\varepsilon| \sum_{l=1}^{\infty} (a_{k,j,l} + a_{k,l,j}) \underline{M}_l \right] r_j.$$

Обозначив через r точную верхнюю границу r_k, имеем

$$r_k \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left[b_{k,j} + |\varepsilon| \sum_{l=1}^{\infty} (a_{k,j,l} + a_{k,l,j}) \underline{M}_l \right] r \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left[b_{k,j} + \right.$$

$$\left. + |\varepsilon| \sum_{l=1}^{\infty} (a_{k,j,l} + a_{k,l,j}) \underline{M} \right] r = (b_k + 2|\varepsilon| a_k \underline{M}) r,$$

а согласно (2.7) и (2.4)

$$r_k \leqslant \left(b_k + \frac{4|\varepsilon| a_k P}{1 - b + \sqrt{\rho}} \right) r \leqslant (1 - \sqrt{\rho}) r$$

для всех r_k. Следовательно, $r \leqslant (1-\sqrt{\rho}) r$, откуда получаем, что $r=0$, т. е. $\underline{M}_k^* = \underline{M}_k$. Таким образом доказана единственность $\underline{M}_k$. Одновременно доказана сходимость метода последовательных приближений. Согласно ([6]), система (2.1) имеет единственное (устойчивое) решение, которое удовлетворяет условию $|m_k| \leqslant \underline{M}_k$ и может быть получено методом последовательных приближений или методом редукции. Процесс последовательных приближений сходится при любых начальных значениях $m_k^{(0)}$, меньших по модулю $\dfrac{2P}{1-b+\sqrt{\rho}}$.

Наконец, покажем, как получать приближенные значения m_k с избытком (m_k^+) и недостатком (m_k^-). Взяв первые n уравнений в (2.1), имеем

$$\overset{n}{m_k^+}=\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\alpha_{k,j,l}\overset{n}{m_j^+}\overset{n}{m_l^+}+\sum_{j=1}^{n}\beta_{k,j}\overset{n}{m_j^+}+p_k+\frac{2P}{1-b+\sqrt{\rho}}\sum_{j=n+1}^{\infty}\Bigg[|\beta_{k,j}|+$$

$$+\frac{2|\varepsilon|P}{1-b+\sqrt{\rho}}\left(\sum_{l=1}^{\infty}|\alpha_{k,j,l}|+\sum_{l=1}^{n}|\alpha_{k,l,j}|\right)\Bigg]; \tag{2.8}$$

$$\overset{n}{m_k^-}=\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\alpha_{k,j,l}\overset{n}{m_j^-}\overset{n}{m_l^-}+\sum_{j=1}^{n}\beta_{k,j}\overset{n}{m_j^-}+p_k-\frac{2P}{1-b+\sqrt{\rho}}\sum_{j=n+1}^{\infty}\Bigg[|\beta_{k,j}|+$$

$$+\frac{2|\varepsilon|P}{1-b+\sqrt{\rho}}\left(\sum_{l=1}^{\infty}|\alpha_{k,j,l}|+\sum_{l=1}^{n}|\alpha_{k,l,j}|\right)\Bigg].$$

Заметим, что сказанное выше относится также к системам с двойным входом:

$$m_{k,j}=\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\mu_1=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\alpha_{k,j,\mu,\mu_1,\nu,\nu_1}m_{\mu,\nu}m_{\mu_1,\nu_1}+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_{k,j,\mu,\nu}m_{\mu,\nu}+p_{k,j}.$$

3. *Окончательная форма решения. Исследование полученных уравнений.* Преобразуем полученное в п. 1 решение, отделив действительную и мнимую составляющие. Обозначив

$$\frac{U_k(r)}{\theta}=u_k(r)-iv_k(r);\quad \frac{w_k(r)}{i\theta}=p_k(r)-iq_k(r);\quad \frac{C_k}{\theta}=\frac{d_k-ib_k}{k^2};$$

$$\frac{C_0}{\theta}=d_0;\quad \frac{N_k}{\theta}=\left(\frac{\lambda}{\varepsilon\sigma R_2}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{m_k-in_k}{k^2};\quad \frac{N_0}{\theta}=\left(\frac{\lambda}{\varepsilon\sigma R_2}\right)^{\frac{1}{3}}m_0, \tag{3.1}$$

из (1.4) получим

$$u_k(r)=\frac{1}{r\eta_k(R_2)}\Bigg\{\frac{R_2}{k^2}[d_k\eta_k(r)-b_k\zeta_k(r)]+\frac{1}{2\delta_k}\int_r^{R_2}r_1[p_k(r_1)\Omega_k(r,R_2-r_1)-$$

$$-q_k(r_1)\Phi_k(r,R_2-r_1)]dr_1+\frac{1}{2\delta_k}\int_{R_1}^{r}r_1[p_k(r_1)\Omega_k(r_1,R_2-r)-q_k(r_1)\Phi_k(r_1,R_2-$$

$$-r)]dr_1+\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}Q(t)[E_k(R_2-r)\cos\gamma_k t+F_k(R_2-r)\sin\gamma_k t]dt\Bigg\}; \tag{3.2}$$

$$v_k(r)=\frac{1}{r\eta_k(R_2)}\Bigg\{\frac{R_2}{k^2}[d_k\zeta_k(r)+b_k\eta_k(r)]+\frac{1}{2\delta_k}\int_r^{R_2}r_1[p_k(r_1)\Phi_k(r,R_2-r_1)+$$

$$+q_k(r_1)\Omega_k(r,R_2-r_1)]dr_1+\frac{1}{2\delta_k}\int_{R_1}^{r}r_1[p_k(r_1)\Phi_k(r_1,R_2-r)+q_k(r_1)\Omega_k(r_1,R_2-$$

$$-r)]dr_1+\frac{1}{\theta}\int\limits_0^{\theta}Q(t)[E_k(R_2-r)\sin\gamma_k t-F_k(R_2-r)\cos\gamma_k t]dt\Big\};$$

$$u_0(r)=d_0+\frac{1}{\lambda R_2 r}\Bigg[r\int\limits_r^{R_2}r_1(R_2-r_1)p_0(r_1)dr_1+(R_2-r)\Bigg(\int\limits_{R_1}^{r}r_1^2p_0(r_1)dr_1+$$

$$+\frac{1}{4\pi\theta}\int\limits_0^{\theta}Q(t)dt\Bigg)\Bigg].$$

Здесь, для краткости, введены следующие обозначения:

$$\eta_k(r)=f_k(R)f_k(r-R_1)+g_k(R)g_k(r-R_1);\quad \zeta_k(r)=f_k(R)g_k(r-R_1)-$$

$$-g_k(R)f_k(r-R_1);\quad R=R_2-R_1;$$

$$f_k(r)=4\lambda\pi[\delta_kR_1(\mathrm{ch}\,\delta_kr\cos\delta_kr-\mathrm{sh}\,\delta_kr\sin\delta_kr)+\mathrm{sh}\,\delta_kr\cos\delta_kr]-$$

$$-\frac{\gamma_kM_1c_1}{R_1}\mathrm{ch}\,\delta_kr\sin\delta_kr;\qquad \delta_k=\sqrt{\frac{k\pi}{\theta a}};$$

$$g_k(r)=4\lambda\pi[\delta_kR_1(\mathrm{ch}\,\delta_kr\cos\delta_kr+\mathrm{sh}\,\delta_kr\sin\delta_kr)+\mathrm{ch}\,\delta_kr\sin\delta_kr]+$$

$$+\frac{\gamma_kM_1c_1}{R_1}\mathrm{sh}\,\delta_kr\cos\delta_kr;$$

$$\Omega_k(r_1,r)=\eta_k(r_1)(\mathrm{sh}\,\delta_kr\cos\delta_kr+\mathrm{ch}\,\delta_kr\sin\delta_kr)+\zeta_k(r_1)(\mathrm{sh}\,\delta_kr\cos\delta_kr-\mathrm{ch}\,\delta_kr\sin\delta_kr);\tag{3.3}$$

$$\Phi_k(r_1,r)=\eta_k(r_1)(\mathrm{sh}\,\delta_kr\cos\delta_kr-\mathrm{ch}\,\delta_kr\sin\delta_kr)-\zeta_k(r_1)(\mathrm{sh}\,\delta_kr\cos\delta_kr+\mathrm{ch}\,\delta_kr\sin\delta_kr);$$

$$E_k(r)=f_k(R)\mathrm{sh}\,\delta_kr\cos\delta_kr+g_k(R)\mathrm{ch}\,\delta_kr\sin\delta_kr;\quad F_k(r)=f_k(R)\mathrm{ch}\,\delta_kr\sin\delta_kr-$$

$$-g_k(R)\mathrm{sh}\,\delta_kr\cos\delta_kr.$$

Неизвестные d_k, b_k, m_k и n_k определятся, согласно (3.1), (1.5) и (1.6), из следующих систем нелинейных алгебраических уравнений:

$$d_k=-\left(\frac{\varepsilon\sigma R_2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}\Bigg\{L_k(R_2)\Bigg[2m_0m_k+k^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}{}'\frac{m_jm_{k-j}-n_jn_{k-j}}{j^2(k-j)^2}\Bigg]-$$

$$-2G_k(R_2)\Bigg[m_0n_k+k^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}{}'\frac{m_jn_{k-j}}{j^2(k-j)^2}\Bigg]\Bigg\}+P_k;$$

$$b_k=-\left(\frac{\varepsilon\sigma R_2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}\Bigg\{G_k(R_2)\Bigg[2m_0m_k+k^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}{}'\frac{m_jm_{k-j}-n_jn_{k-j}}{j^2(k-j)^2}\Bigg]+$$

$$+2L_k(R_2)\Bigg[m_0n_k+k^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}{}'\frac{m_jn_{k-j}}{j^2(k-j)^2}\Bigg]\Bigg\}+T_k;$$

$$d_0=-\left(\frac{\varepsilon\sigma R_2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{hR_2}\left(m_0^2+\sum_{j=-\infty}^{\infty}{}'\frac{m_j^2+n_j^2}{j^4}\right)+P_0;\tag{3.4}$$

$$m_k=\left(\frac{\varepsilon\sigma R_2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}\Bigg[2d_0d_k+k^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}{}'\frac{d_jd_{k-j}-b_jb_{k-j}}{j^2(k-j)^2}\Bigg];$$

$$n_k=2\left(\frac{\varepsilon\sigma R_2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}\Bigg[d_0b_k+k^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}{}'\frac{d_jb_{k-j}}{j^2(k-j)^2}\Bigg];\quad m_0=\left(\frac{\varepsilon\sigma R_2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}\left(d_0^2+\sum_{j=-\infty}^{\infty}{}'\frac{d_j^2+b_j^2}{j^4}\right);$$

где

$$L_k(r)=\frac{1}{A_k^2+B_k^2}\left[A_k f_k(r-R_1)+B_k g_k(r-R_1)\right];$$

$$G_k(r)=\frac{1}{A_k^2+B_k^2}\left[B_k f_k(r-R_1)-A_k g_k(r-R_1)\right];$$

$$A_k=\mathrm{ch}\,\delta_k R\cos\delta_k R\Big\{4\lambda\pi\left[\delta_k(R+hR_1R_2)(1-\mathrm{th}\,\delta_k R\,\mathrm{tg}\,\delta_k R)-2\delta_k^2R_1R_2\,\mathrm{tg}\,\delta_k R+\right.$$

$$\left.+(hR_2-1)\,\mathrm{th}\,\delta_k R\right]-\frac{2k\pi M_1c_1}{\theta R_1}\left[\delta_k R_2(1+\mathrm{th}\,\delta_k R\,\mathrm{tg}\,\delta_k R)+(hR_2-1)\,\mathrm{tg}\,\delta_k R\right]\Big\};$$

$$B_k=\mathrm{ch}\,\delta_k R\cos\delta_k R\Big\{4\lambda\pi\left[\delta_k(R+hR_1R_2)(1+\mathrm{th}\,\delta_k R\,\mathrm{tg}\,\delta_k R)+2\delta_k^2R_1R_2\,\mathrm{th}\,\delta_k R+\right.$$

$$\left.+(hR_2-1)\,\mathrm{tg}\,\delta_k R\right]+\frac{2k\pi M_1c_1}{\theta R_1}\left[\delta_k R_2(1-\mathrm{th}\,\delta_k R\,\mathrm{tg}\,\delta_k R)+(hR_2-1)\,\mathrm{th}\,\delta_k R\right]\Big\}; \quad (3.5)$$

$$P_k=-\frac{kR_2}{2\pi}\int_0^\theta\left[L_k(R_2)\sin\gamma_k t+G_k(R_2)\cos\gamma_k t\right]\frac{d}{dt}\left[hS(t)+\frac{\varepsilon\sigma}{\lambda}S^4(t)\right]dt+$$

$$+k^2\int_{R_1}^{R_2} r\left[L_k(r)p_k(r)-G_k(r)q_k(r)\right]dr+\frac{k^2\delta_k}{(A_k^2+B_k^2)\theta}\int_0^\theta Q(t)\left[(A_k+B_k)\cos\gamma_k t+\right.$$

$$\left.+(A_k-B_k)\sin\gamma_k t\right]dt;$$

$$T_k=-\frac{kR_2}{2\pi}\int_0^\theta\left[G_k(R_2)\sin\gamma_k t-L_k(R_2)\cos\gamma_k t\right]\frac{d}{dt}\left[hS(t)+\frac{\varepsilon\sigma}{\lambda}S^4(t)\right]dt+$$

$$+k^2\int_{R_1}^{R_2} r\left[G_k(r)p_k(r)+L_k(r)q_k(r)\right]dr+\frac{k^2\delta_k}{(A_k^2+B_k^2)\theta}\int_0^\theta Q(t)\left[(B_k-A_k)\cos\gamma_k t+\right.$$

$$\left.+(A_k+B_k)\sin\gamma_k t\right]dt;$$

$$P_0=\frac{1}{h\theta}\left\{\int_0^\theta\left[hS(t)+\frac{\varepsilon\sigma}{\lambda}S^4(t)\right]dt+\frac{1}{\lambda R_2^2}\left[\int_{R_1}^{R_2} r^2 w_0(r)dr+\frac{Q_0}{4\pi}\right]\right\},$$

а штрих при знаке сумм обозначает, что при суммировании индексы $j=0$ и $j=k$ опускаются. Исследуем разрешимость систем (3.4). Вначале оценим сумму модулей коэффициентов при неизвестных в каждом из уравнений этих систем. Обозначив через α_k сумму модулей коэффициентов в k-ом уравнении первой из систем (3.4), имеем

$$\alpha_k=2\left(\frac{\varepsilon\sigma R_2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}\left[|L_k(R_2)|+|G_k(R_2)|\right]\left(\frac{2}{3}\pi^2+1-\frac{6}{k^2}\right). \quad (3.6)$$

Аналогичные выражения получаем и для других систем (3.4). Произведенные оценки показывают, что при $\delta_k(R_2-R_1)\geqslant\pi$ $|L_k(R_2)|<$ $<\frac{1}{\delta_k R_2}$; $|G_k(R_2)|<\frac{1}{\delta_k R_2}$. Свободные члены P_k и T_k, в силу условий относительно $S(t)$, $w(r, t)$ и $Q(t)$, остаются ограниченными и при $\alpha P < \frac{1}{4}$, где $\alpha = \sup\limits_k \alpha_k$, $P = \sup\limits_k(|P_k|; |T_k|)$, системы (3.4), согласно п. 2, имеют единственное устойчивое решение, которое может быть получено методом последовательных приближений или методом редукции. Решая укороченную систему, получим двустороннюю оценку неизвестных d_k, b_k, m_k и n_k, после чего способом, описанным в ([7]) получим значения $U(r, t)$ с избытком и недостатком.

Институт математики Академии наук
Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Դյուրին խառնվող հեղուկով լցված սնամեջ գնդում ջերմության պարբերական հոսքը

Հոդվածում դիտարկվում է դյուրին խառնվող հեղուկով լցված սնամեջ գնդում ջերմության պարբերական տարածման խնդիրը՝ գնդի արտաքին մակերևույթի վրա ջերմափոխանակության ու ճառագայթման համատեղ առկայության դեպքում։ Ենթադրվում է, որ գնդում և հեղուկում գործում են պարբերաբար փոփոխվող հզորությամբ ջերմության աղբյուրներ։ Խնդրի լուծումը տրվում է շարքով ըստ եռանկյունաչափական և ցուցչային ֆունկցիաների, որի գործակիցները որոշվում են հանրահաշվական ոչ գծային անվերջ սիստեմներից։ Տրվում են լուծելիության պայմանները այդպիսի սիստեմների մի դասի համար։ Սահմանվում է նրանց կայուն լուծման հասկացությունը։ Ապացուցվում է կայուն լուծման միակությունը և ստացված է գնահատականը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. Р. Эккерт, Р. М. Дрейк.* Теория тепло- и массообмена, Госэнергоиздат, М.—Л., 1961. [2] *Г. Карслоу, Д. Егер.* Теплопроводность твердых тел, Наука, М., 1964. [3] *Г. Ф. Мучник, И. Б. Рубашов.* Методы теории теплообмена, ч. I, Высшая школа, М., 1970. [4] *А. В. Лыков.* Теория теплопроводности, Высшая школа, М., 1967. [5] *Г. Гребер, С. Эрк, У. Григулль,* Основы учения о теплообмене, ИЛ, М., 1958. [6] *Л. В. Канторович, В. М. Крылов.* Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, М., 1962. [7] *Р. С. Минасян,* Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, т. 11, № 3 (1958).