ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Том 88 1989 №4

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

К. В. Гаспарин

Достаточные условия равномерной интегрируемости экспоненциальных мартингалов

(Представлено академиком АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 24/I 1989)

В данной заметке получены достаточные, близкие к неулучшаемым условия равномерной интегрируемости экспоненциальных опциональных мартингалов. При «обычных» предположениях условия такого типа получены ранее А. А. Новиковым ([1,2]) и Д. Лепинглем, Ж. Мемэном ([3]).

Будем предполагать заданным полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с произвольной фильтрацией $F=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Рассматриваемые здесь мартингалы считаются опционально измеримыми láglád процессами ([4]).

Рассмотрим уравнение Долеан

$$Z_t = 1 + \int\limits_{]0,t]} Z_{s-}\,dM^r_s + \int\limits_{[0,t[} Z_s\,dM^g_{s+}, \tag{1}$$

где $M^r = M^c + M^d$, M^c и $M^d (M^g)$—непрерывная и чисто разрывная cádlág(cáglád) составляющие заданного локального мартингала $M \in \mathcal{M}_{loc} (M = M^r + M^g)$. Единственное (с точностью до неотличимости) решение $Z = \varepsilon(M)$ уравнения (1) задается формулой (см. ([5]))

$$\varepsilon(M)_t = \exp\left\{M_t - \frac{1}{2}\langle M^c\rangle_t + \sum_{i=1,2} [\ln(1+u) - u] * \mu^i_t\right\},$$

где $\langle M^c\rangle$—квадратическая характеристика $M^c \in \mathcal{M}^c_{loc}$, $\mu^1(ds, du)$ и $\mu^2(ds, du)$—целочисленные случайные меры на пространстве $(R_+ \times E, B(R_+) \times B(E))$, $E = R^1 \setminus \{0\}$, порожденные скачками вида $\Delta M_s = M_s - M_{s-}$ и $\Delta^+ M_s = M_{s+} - M_s$, $s \geq 0$, соответственно.

Теорема 1. *Пусть* $M \in \mathcal{M}_{loc}$. *Тогда* $\varepsilon(M)$ — *равномерно интегрируемый мартингал, если*

а) *при* $\Delta M \geq -1$, $\Delta^+ M \geq -1$ *возрастающий процесс*

$$C_t = \frac{1}{2}\langle M^c\rangle_{t\wedge T} + \sum_{i=1,2} [(1+u)\ln(1+u) - u] * \mu^i_{t\wedge T} -$$

локально интегрируемый $(C \in \mathcal{A}^+_{loc})$ *и*

$$E\exp\tilde{C}_\infty < \infty, \tag{2}$$

где $T = \inf(t: \Delta M_t = -1$ *или* $\Delta^+ M_t = -1$, *а* $\tilde{C}$ — *компенсатор процесса* C *(см.* ([5]));

б) *при* $\Delta M > -1$, $\Delta^+ M > -1$

$$E\exp A_\infty < \infty, \tag{3}$$

где $A_t = \frac{1}{2} \langle M^c \rangle_t + \sum_{i=1,2} \left[\ln(1+u) - \frac{u}{1+u} \right] * \mu^i_t$.

Для доказательства пункта а) теоремы 1 приведем ряд лемм.

Лемма 1. *При выполнении условия* (2) *имеем* $M \in H^1_T$ *и* $\varepsilon(M)_{T-} > 0$ P—*п. н.* ($H^1_T = \{M \in \mathcal{M}_{loc} : E[M, M]^{\frac{1}{2}}_T < \infty\}$).

Доказательство. Из элементарных неравенств и условия (2) имеем

$$E[M, M]^{\frac{1}{2}}_T \leq [E(\langle M^c \rangle_T + \sum_{i=1,2} I_{|u| \leq 1} u^2 * \mu^i_T)]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ E \sum_{i=1,2} I_{u>1} u * \mu^i_T \leq [E(\langle M^c \rangle_T + 6 \sum_{i=1,2} I_{|u| \leq 1} [(1+u)\ln(1+u) -$$

$$- u] * \mu^i_T)]^{\frac{1}{2}} + 3E \sum_{i=1,2} I_{u>1} [(1+u)\ln(1+u) - u] * \mu^i_T < \infty.$$

Отсюда, в частности, следует, что $E|\Delta M_S| I_{S<\infty} < \infty$ и $E|\Delta^+ M_U| I_{U<\infty} < \infty$ для всех $S < T$, $U \leq T$, т. е. $M_{T-} < \infty$ P—п. н. (ср. ([6])). Отсюда следует, что $\varepsilon(M)_{T-} > 0$ P—п. н.

Лемма 2. *Пусть* $0 < \lambda < 1$ *и процесс* $C \in \mathcal{A}^+_{loc}$. *Тогда процесс* $G = \varepsilon^\lambda(M) \exp(1-\lambda)\tilde{C}$ — *локальный субмартингал.*

Доказательство. В работе ([7]) доказано, что

$$\varepsilon^\lambda(M) = \varepsilon(\overline{N}_\lambda + \overline{A}_\lambda) = \varepsilon(\tilde{N}_\lambda)\varepsilon(\overline{A}_\lambda), \tag{4}$$

где $\overline{N}_\lambda = \lambda M + \sum_{i=1,2} (V^i - \tilde{V}^i)$, $V^i = [(1+u)^\lambda - 1 - \lambda u] * (\mu^i)^T$,

$$\overline{A}_\lambda = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \langle M^c \rangle^T + \sum_{i=1,2} \tilde{V}^i, \ \tilde{N}_\lambda = (1+\Delta\overline{A}_\lambda)^{-1} \cdot \overline{N}^r_\lambda + (1+\Delta^+\overline{A}_\lambda)^{-1} \cdot \overline{N}^g_\lambda,$$

$$\overline{N}_\lambda = \overline{N}^r_\lambda + \overline{N}^g_\lambda (\Delta\overline{A}_\lambda > -1, \Delta^+\overline{A}_\lambda > -1).$$

Кроме того имеем

$$\varepsilon^\lambda(M) = 1 + \varepsilon^\lambda(M)_- \cdot (\overline{N}^r_\lambda + \overline{A}^r_\lambda) + \varepsilon^\lambda(M) \cdot (\overline{N}^g_\lambda + \overline{A}^g_\lambda),$$

$$\exp(1-\lambda)\tilde{C} = 1 + (1-\lambda)\{[\exp(1-\lambda)\tilde{C}_-] \cdot \tilde{C}^r + [\exp(1-\lambda)\tilde{C}] \cdot \tilde{C}^g\},$$

где
$$\overline{A}_\lambda = \overline{A}^r_\lambda + \overline{A}^g_\lambda, \ \tilde{C} = \tilde{C}^r + \tilde{C}^g.$$

Отсюда, применяя формулу Ито ([4]), получим

$$G = 1 + G_- \cdot [\overline{N}^r_\lambda + \overline{A}^r_\lambda + (1-\lambda)\tilde{C}^r] + G \cdot [\overline{N}^g_\lambda + \overline{A}^g_\lambda + (1-\lambda)\tilde{C}^g] +$$

$$+ S'[\Delta G - (\Delta\varepsilon^\lambda(M))\exp(1-\lambda)\tilde{C}_- - \varepsilon^\lambda(M)_-\Delta\exp(1-\lambda)\tilde{C}] +$$

$$+ S''[\Delta^+ G - (\Delta^+\varepsilon^\lambda(M))\exp(1-\lambda)\tilde{C} - \varepsilon^\lambda(M)\Delta^+\exp(1-\lambda)\tilde{C}],$$

где
$$S'[X] = \sum_{s \leq \cdot} X_s, \ S''[X] = \sum_{s < \cdot} X_s.$$

Далее, после несложных преобразований, получим

$$G=1+G_-\cdot\{\bar N^r_\lambda+(\tilde V^1-V^1)+(1-\lambda)(\tilde C^d-C^d)+(1-\lambda)[M^d,\tilde C^d]\}+$$
$$+G\cdot\{\bar N^g_\lambda+(\tilde V^g-V^g)+(1-\lambda)(\tilde C^g-C^g)+(1-\lambda)[M^g,\tilde C^g]\}+$$
$$+G_-\cdot\left\{\frac{(\lambda-1)^2}{2}\langle M^c\rangle^T+S'[L(1+\Delta M,\Delta\tilde C)]\right\}+G\cdot S''[L(1+\Delta^+M,\Delta^+\tilde C)],$$

где $L(x,y)=x\exp(1-\lambda)y-x+(1-\lambda)x\ln x-(1-\lambda)xy\geqslant 0$ $\forall x,y\in R_+$. Отсюда так как $[M^d,\tilde C^d]\in\mathcal{M}_{loc}$ и $[M^g,\tilde C^g]\in M_{loc}$ (см. (⁸)), имеем $G=m+D$, где $m\in\mathcal{M}_{loc}$, D—возрастающий процесс. Но $\exp(1-$ $-\lambda)\tilde C\in\mathcal{P}_s\cap\mathcal{V}$—сильно предсказуемый процесс ограниченной вариации—локально ограничен (⁵). Кроме того, так как процесс $\varepsilon^\lambda(M)$— неотрицательный супермартингал, то $G\in\mathcal{A}_{loc}$. Значит, процесс $D\in\mathcal{A}^+_{loc}$ и G—локальный субмартингал (см. (⁹)).

Лемма 3. *Пусть* $0<\lambda<1$ *и процесс* $C\in\mathcal{A}^+_{loc}$ *удовлетворяет условию* (2). *Тогда имеет место неравенство*

$$\varepsilon^\lambda(M)\leqslant\varepsilon(\bar N_\lambda)\leqslant\varepsilon^\lambda(M)\exp(1-\lambda)\tilde C. \tag{5}$$

Доказательство. В разложении (4) $\varepsilon(\bar A_\lambda)$—невозрастающий процесс с $\varepsilon(\bar A_\lambda)_0=1$ (см. (⁷)). Отсюда следует, что $\varepsilon(\bar N_\lambda)\geqslant\varepsilon^\lambda(M)$. С другой стороны, имеем $G=\varepsilon(\bar N_\lambda)\bar F$, где $\bar F=\varepsilon(\bar A_\lambda)\exp(1-\lambda)\tilde C\in\mathcal{P}_s\cap\mathcal{V}$. Тогда, применяя формулу Ито (⁴), получим $G=\varepsilon(\bar N_\lambda)_-\cdot\bar F^r+\varepsilon(\bar N_\lambda)\cdot$ $\cdot\bar F^g+\bar F\cdot\varepsilon(\bar N_\lambda)^r+\bar F_+\cdot\varepsilon(\bar N_\lambda)^g$, $(\bar F=\bar F^r+\bar F^g)$. Отсюда, в силу единственности разложения Дуба—Мейера (⁹) для локального субмартингала G и из того, что $\varepsilon(\bar N_\lambda)_->0$ на $[\![0,T]\!]$ и $\varepsilon(\bar N_\lambda)>0$ на $[\![0,T[\![$ (см. (4) и лемму 1) заключаем, что $\bar F$—возрастающий процесс. Однако, так как $\Delta\bar A_\lambda>-1$ и $\Delta^+\bar A_\lambda>-1$ (⁷), т. е. $\varepsilon(\bar A_\lambda)>0$, то согласно (4) имеем $\varepsilon(\bar N_\lambda)=0$ на $[\![T,\infty[\![$ и неравенство $G\geqslant\varepsilon(\bar N_\lambda)$ справедливо на $\mathbf{R}_+$.

Лемма 4. *Пусть* $0<\lambda<1$ *и процесс* $C\in\mathcal{A}^+_{loc}$ *удовлетворяет условию* (2). *Тогда процесс* $\varepsilon(\bar N_\lambda)$*—равномерно интегрируемый мартингал.*

Доказательство. Положим $S_n=\inf(t:\tilde C_{t+}\geqslant n)$. Очевидно $(S_n)_{n\geqslant1}\subset\mathcal{F}$ (F—м. о.), $S_n\uparrow\infty$ P—п. н. Пусть $(U_m,\varepsilon^m)_{m\geqslant1}$—локализующая последовательность для $\varepsilon(\bar N_\lambda)$ (т. е. $U_m\in\mathcal{F}_+(F_+$—м. о.), $U_m\uparrow\infty$ P—п. н. при $m\uparrow\infty$, $\varepsilon^m\in\mathcal{M}(F)$ (F—мартингал) и $\varepsilon(\bar N_\lambda)=\varepsilon^m$ на $[\![0,U_m]\!]$ $\forall m\geqslant1$). Тогда $\varepsilon(\bar N_\lambda)_+=\varepsilon^m_+$ на $[\![0,U_m[\![$ $\forall m\geqslant1$ и $\varepsilon^m_+\in\mathcal{M}(F_+)$.

Имеет место очевидное равенство

$$1=E\varepsilon(\bar N_\lambda)_{S_n\wedge U_m+}=E\varepsilon(\bar N_\lambda)_{S_n+}I_{S_n<U_m}+E\varepsilon(\bar N_\lambda)_{U_m+}I_{U_m<S_n}. \tag{6}$$

Согласно (5) имеем $\sup\limits_m E[\varepsilon(\bar N_\lambda)_{U_m+}I_{U_m<S_n}]^{\frac{1}{\lambda}}\leqslant\exp n\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)$, так как $\varepsilon(M)_-$—F_+—супермартингал и $E\varepsilon(M)_{U_m+}\leqslant1$. Отсюда при $\lambda<1$ последовательность $(\varepsilon(\bar N_\lambda)_{U_m+}I_{U_m<S_n})_{m\geqslant1}$ равномерно интегрируема при фиксированном $n\geqslant1$. Далее, используя теорему Лебега о мажорируемой сходимости для $(\varepsilon(\bar N_\lambda)_{S_n+}I_{S_n<U_m})_{m\geqslant1}$, получим из (6) при

$m\uparrow\infty$ $1=E\varepsilon(\tilde N_\lambda)_{s_n+}I_{s_n<\infty}+E\varepsilon(\tilde N_\lambda)_\infty I_{s_n=\infty}=E\varepsilon(\tilde N_\lambda)_{s_n+}$. Отсюда имеем

$$E\varepsilon(\tilde N_\lambda)_\infty=E[\varepsilon(\tilde N_\lambda)_\infty-\varepsilon(\tilde N_\lambda)_{s_n+}]+1\geqslant 1-E\varepsilon(\tilde N_\lambda)_{s_n+}I_{s_n<\infty}. \qquad (7)$$

Применяя далее (5) и неравенство Гельдера, получим $E\varepsilon(\tilde N_\lambda)_{s_n+}I_{s_n<\infty}\leqslant$ $\leqslant[E\varepsilon(M)_{s_n+}]^\lambda[EI_{s_n<\infty}\exp C_{s_n+}]^{1-\lambda}\leqslant[EI_{s_n<\infty}\exp C_\infty]^{1-\lambda}<\infty$. Отсюда, согласно условию леммы, $E\varepsilon(\tilde N_\lambda)_{s_n+}I_{s_n<\infty}\to 0$ при $n\uparrow\infty$.

Таким образом из (7) окончательно имеем $E\varepsilon(\tilde N_\lambda)_\infty\geqslant 1$, т. е. $E\varepsilon(\tilde N_\lambda)_\infty=1$.

Доказательство теоремы 1, а). Положим $\tilde M=\ln\varepsilon(M)-\tilde C$ (считаем $\ln 0=-\infty$) и $V_n=\inf(t:\tilde M_{t+}\leqslant -n)$, $(V_n)_{n\geqslant 1}\subset\mathcal F_+$, $V_n\uparrow\infty$ P—п. н. Согласно (5), имеем $\varepsilon(\tilde N_\lambda)\leqslant\exp(\lambda\tilde M+\tilde C)$ $(\varepsilon(\tilde N_\lambda)\leqslant\varepsilon(M)\exp(1-$ $-\lambda)\tilde M)$. Отсюда получим $\varepsilon(N_\lambda)_{V_n+}\leqslant I_{V_n<\infty}\exp(C_{V_n+}-\lambda n)+$ $+I_{V_n=\infty}\varepsilon(M)_{V_n+}\exp(1-\lambda)n\leqslant\exp\tilde C_\infty+\varepsilon(M)_\infty\exp n$.

Таким образом последовательность $\{\varepsilon(\tilde N_\lambda)_{V_n+}\}_{0<\lambda<1}$ при фиксированном $n\geqslant 1$, равномерно интегрируема по λ. С другой стороны из (5) имеем $\varepsilon(\tilde N_\lambda)_{V_n+}\to\varepsilon(M)_{V_n+}$ P—п. н. при $\lambda\uparrow 1$, т. е. сходимость имеет место и в L^1. Но т. к. $E\varepsilon(N_\lambda)_{V_n+}=1$ (лемма 4), то $E\varepsilon(M)_{V_n+}=$ $=1$ и справедливо неравенство

$$E\varepsilon(M)_\infty=E[\varepsilon(M)_\infty-\varepsilon(M)_{V_n+}]I_{V_n<\infty}+1\geqslant 1-E\varepsilon(M)_{V_n+}I_{V_n<\infty} \qquad (8)$$

Но т. к. $E\varepsilon(M)_{V_n+}I_{V_n<\infty}\leqslant\exp(-n)E\exp\tilde C_\infty$, то из (8) при $n\uparrow\infty$ получим $E\varepsilon(M)_\infty\geqslant 1$, т. е. $E\varepsilon(M)_\infty=1$.

Доказательство теоремы 1, б). Рассмотрим процесс $\varepsilon(\lambda M)\in$ $\in\mathcal M_{loc}$ $(0<\lambda<1)$. Из очевидных равенств

$$\varepsilon^\lambda(M)=\exp\left(\lambda M-\frac{\lambda}{2}<M^c>\right)\exp\{\lambda\sum_{i=1,2}[\ln(1+u)-u]*\mu^i\},$$

$$\varepsilon(\lambda M)=\exp\left(\lambda M-\frac{\lambda^2}{2}<M^c>\right)\exp\{\sum_{i=1,2}[\ln(1+\lambda u)-\lambda u]*\mu^i\}$$

и из элементарного неравенства $(u>-1)$

$$\lambda\ln(1+u)\leqslant\ln(1+\lambda u)\leqslant\ln(1+u)-(1-\lambda)\frac{u}{1+u}$$

имеем

$$\varepsilon^\lambda(M)\leqslant\varepsilon(\lambda M)\leqslant\varepsilon^\lambda(M)\exp(1-\lambda)A. \qquad (9)$$

Неравенство (9) есть аналог неравенства (5) для процесса $\varepsilon(\lambda M)$. Доказательство теоремы получится теперь заменой в лемме 4 процессов $\varepsilon(\tilde N_\lambda)$ на $\varepsilon(\lambda M)$, $\tilde C$ на A и соответствующим изменением доказательства в теореме 1, а).

Теорема 2. *Пусть* $N\in\mathcal M_{loc}$, $z^1\in\mathcal P(F)\times B(E)$, $z^2\in\mathcal O(F)\times B(E)$ *так, что* $I_{z^i<-1}z^i*\mu^i_t<\infty$ P—*п. н.* $\forall t\in R$, *и*

$$E\exp\left\{\frac{1}{2}<N>_\infty+\sum_{i=1,2}(z^i\exp z^i-\exp z^i+1)*\nu^i_\infty\right\}<\infty,$$

где $\bar{\mu}^1$ и $\bar{\mu}^2$—квазинепрерывные слева $\mathfrak{S}(F)$ и $\mathfrak{S}(F_+)$-измеримые, соответственно, целочисленные меры с непрерывными компенсаторами $\bar{\nu}^1$ и $\bar{\nu}^2$ (см. ([5])). Тогда процесс

$$\alpha = \exp\Big\{N - \frac{1}{2}\langle N\rangle + \sum_{i=1,2}\big[I_{|z^i|>1}z^i * \bar{\mu}^i + I_{|z^i|\leq 1}z^i * (\bar{\mu}^i - \bar{\nu}^i) -$$

$$- (\exp z^i - I_{|z^i|\leq 1}z^i - 1) * \bar{\nu}^i\big]\Big\} -$$

равномерно интегрируемый мартингал.

Доказательство теоремы 2 получается применением теоремы 1, б) к локальному мартингалу $M = N + \sum_{i=1,2}(\exp z^i - 1) * (\bar{\mu}^i - \bar{\nu}^i)$, учитывая, что $\alpha = \varepsilon(M)$ (см. ([10])).

Замечание. На примере пуассоновского мартингала (ср. ([3])) можно показать, что условия (2) и (3) неулучшаемы в том смысле, что из условий $E\exp(1-\varepsilon)\tilde{C} < \infty$ и $E\exp(1-\varepsilon)A_\infty < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$ не следует равномерная интегрируемость экспоненты $\varepsilon(M)$ (см. ([10])).

Ереванский государственный университет

Կ. Վ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

Էքսպոնենցիալ մարտինգալների հավասարաչափ ինտեգրելիության բավարար պայմաններ

Հոդվածում ստացված են օպցիոնալ լոկալ մարտինգալի Դոլեանի էքսպոնենտի հավասարաչափ ինտեգրելիության բավարար պայմանները, որոնք մոտ են անլավացնելիներին։

Լրիվ հավանակային տարածության վրա տրված ֆիլտրացիան ենթադրվում է կամայական։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Новиков*, Теория вероятностей и ее применения, т. 17. № 4 (1972). [2] *А. А. Новиков*, Теория вероятностей и ее применения, т. 20. № 1 (1975). [3] *D. Lepingle, J. Memin*, Z. Wahrsch. verw. Geb., Bd. 42 (1978). [4] *Л. И. Гальчук*, Мат. сб., т. 112 (154), № 4(8) (1980). [5] *Л. И. Гальчук*, Теория вероятностей и ее примен., т. 29, № 1 (1984). [6] *Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев*, Теория мартингалов, Наука, М., 1986. [7] *К. В. Гаспарян*, ДАН АрмССР, т. 86. № 2 (1988). [8] *К. В. Гаспарян*, Труды ВЦ АН АрмССР и ЕГУ, т. 15 (1988). [9] *Л. И. Гальчук*, Мат. сб., т. 115 (157), № 2(6) (1981). [10] *К. В. Гаспарян*, Канд. дис., Ереван, 1988.