ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 88 1989 №4

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

С. А. Григорян

Обобщенные мерморфные функции

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 2/Х 1988)

1. Пусть Γ—подгруппа группы вещественных чисел R, наделенная дискретной топологией, и G—компактная группа, являющаяся группой характеров группы Γ. На локально-компактном пространстве Ω, полученном из декартова произведения $G\times[0, 1)$ путем отождествления в точку слоя $G\times\{0\}$, рассмотрим систему функций

$$\{\varphi^a\}_{a\in\Gamma_+},\ \Gamma_+=\{a\in\Gamma;\ a\geqslant 0\};\ \varphi^a(\alpha\cdot r)=\alpha(a)\cdot r^a.$$

Определение 1. Пусть D—открытое множество в Ω и f—непрерывная функция на D. Будем говорить, что f—обобщенно-аналитическая функция или просто аналитическая функция на D, если f локально на D аппроксимируется линейными комбинациями функций из $\{\varphi^a\}_{a\in\Gamma_+}$.

Обозначим через A равномерную алгебру на Ω, порожденную функциями из $\{\varphi^a\}_{a\in\Gamma_+}$. Эта алгебра обладает многими свойствами, присущими диск-алгебре. В частности, когда $\Gamma=Z$, A—диск-алгебра.

Определение 2. Замкнутое в Ω множество E называется множеством интерполяции для A, если сужение A на E совпадает с $C(E)$.

Напомним, что $C(E)$—банахова алгебра в sup-норме.

Пусть $\rho(s_1, s_2)=\sup\limits_{\substack{f\in A\\ \|f\|=1}}|f(s_1)-f(s_2)|$—метрика Глисона на Ω.

Теорема 1. *Для замкнутого подмножества E в $\Omega\setminus\{*\}$, где $\{*\}=G\times\{0\}$, следующие условия эквивалентны:*

а) *E—множество интерполяции для A;*

б) *существует $\delta>0$ такое, что $\rho(s_1, s_2)>\delta$ для всех $s_1, s_2\in E$, $s_1\neq s_2$;*

в) *сужение A на E является замкнутой подалгеброй в $C(E)$.*

Отметим, что не каждое интерполяционное множество является множеством нулей некоторой функции из A. С другой стороны, нули функций из A не всегда образуют интерполяционное множество.

Теорема 2. *Пусть $E(f)=\{s\in\Omega,\ f(s)=0\}$ содержится в $\Omega\setminus\{*\}$ для некоторого $f\in A$. Тогда*

$$E(f)=\bigcup_{1}^{n}E_i,$$

где каждое E_i является множеством интерполяции.

Определение 3. Множество E, $E\subset\Omega$, назовем тонким, если для любого $s\in E$ найдутся окрестность $U\subset\Omega$ и аналитическая на U функция f такие, что множество $E\cap U$ совпадает с множеством нулей функции f на U.

Если D—открытое множество в Ω и f—ограниченная аналитическая функция на $D\setminus E$, где E—тонкое множество, то f аналитически продолжается на все D, т. е. существует аналитическая на D функция, совпадающая с f на $D\setminus E$ (см. [1]).

Определение 4. Пусть D—открытое множество в Ω. Функцию f назовем мероморфной на D, если

а) эта функция обобщенно аналитическая на $D\setminus E$, где E—некоторое тонкое множество;

б) функция f не продолжается аналитически ни в одну точку множества E;

в) для каждой точки $s\in E$ существует окрестность U_s и обобщенно аналитическая на U_s функция g_s, $g_s\not\equiv 0$, такая, что функция $\Psi\cdot g_s$ аналитически продолжается на все U_s.

У мероморфной в D функции кроме нулей и полюсов могут быть и существенно особые точки, которые образуют нигде не плотное подмножество тонкого множества.

Теорема 3. *Пусть f мероморфная функция на Ω. Тогда найдется обобщенно-аналитическая в Ω функция g, $g\not\equiv 0$, такая что $f\cdot g$ аналитически продолжается на Ω.*

В доказательстве этого результата существенно используются теоремы 1 и 2.

2. Пусть $K=\{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Im}\,z\geq 0\}$—полуплоскость, и A^0—алгебра всех равномерно почти-периодических аналитических функций на K. Как хорошо известно, каждую функцию $f\in A^0$ формально можно представить в виде $f(z)\sim\sum\limits_{a\geq 0}c(a)e^{iaz}$, $c(a)\in\mathbb{C}$.

Алгебра A^0 равномерно замкнута на K и, как показали Р. Аренс и И. Зингер (см. [2]), изометрически изоморфна равномерной алгебре A на $\overline{\Omega}$, порожденной функциями $\{\varphi^a\}_{a\in R_+}$ (G в этом случае является компактификацией Бора вещественной прямой $\mathbb{R}$). Этот факт можно проследить и из следующих соображений.

Рассмотрим A^*—сопряженное пространство к A^0. Очевидно, K естественно вкладывается в A^*, и поэтому будем считать, что $K\subset A^*$. Пусть $\overline{K}$—слабо*-замыкание K в A^*. Тогда $\overline{K}$—компакт (так как K содержится в единичном шаре A^*) и существует гомеоморфизм между $\overline{K}$ и пространством $\overline{\Omega}=G\times[0,1]/G\times\{0\}$. Этот гомеоморфизм порождает изометрический автоморфизм между A^0 и A.

Для некоторого множества E, $E\subset K\subset A^*$, положим $E_k=\overline{E}\cap K$. Скажем, что E является множеством интерполяции для A^0, если сужение $A|_E$ изометрически (в равномерной на E норме) изоморфно пространству $C(X)$ всех непрерывных функций на некотором компакте X. Другими словами, сужение A^0 на E (рассматривая A^0 как подпространство A^{**}), совпадает с $C(E)$.

Теорема 4. *Пусть для некоторых c и d $(0<c<d<\infty)$ E со-*

держится в $[c, d] = \{z \in \mathbb{C};\ c \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant d\}$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) E — *множество интерполяции;*

б) *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любых* $z_1, z_2 \in E_k$, $z_1 \neq z_2$, $|z_1 - z_2| > \delta$;

в) *сужение* A *на* E *замкнуто в равномерной на* E *норме.*

Теорема 5. *Пусть* $E \subset [c, d]$, $0 < c < d < \infty$. *Для того чтобы существовала функция* $f \in A^0$, $f \neq 0$, *такая, что* $f|_E = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы* E_k *можно было представить в виде объединения конечного числа множеств интерполяции.*

Теорема 6. f—*мероморфная функция на* $\operatorname{int} K$. *Предположим, что существует такое конечное покрытие* $\operatorname{int} K$ *полосами* $[c_i, d_i]$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *что на каждом* $[c_i, d_i]$ *существует почти-периодическая функция* g_i *такая, что* $f \cdot g_i$ *расширяется на* $[c_i, d_i]$ *до почти-периодической аналитической функции. Тогда найдется почт-пиериодическая аналитическая в* $\operatorname{int} K$ *функция* g, *такая что* $f \cdot g$ *расширяется до почти-периодической аналитической* $\operatorname{int} K$ *функции.*

Институт математики Академии наук ,
Армянской ССР

Ս. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Մերոմորֆ ֆունկցիաների ընդհանրացում

Դիցուք Γ—*իրական թվերի խմբի որոշ ենթախումբն է.* G-*ն* Γ *խմբի համալուծ խումբն է, իսկ* $\Omega = G \times [0, \infty]/G \times \{0\}$ *կամայական* $a \in \Gamma_+ = \{a \in \Gamma;\ a \geqslant 0\}$ *համապատասխանում է* $\varphi^a(\alpha \cdot r) = \alpha(a) r^a$ *անընդհատ ֆունկցիա* Ω *լոկալ կոմպակտ տարածության վրա։ Նշված* φ_a *ֆունկցիաների գծային կոմբինացիաները կոչվում են բազմանդամներ։ Այն ֆունկցիաները, որոնք լոկալ մոտարկվում են բազմանդամներով, կոչվում են ընդհանրացված, իսկ ընդհանրացված ֆունկցիաների հարաբերությունները՝ մերոմորֆ։*

Ստացված արդյունքները նկարագրում են ընդհանրացված ֆունկցիաների ինտերպոլյացիոն բազմությունները։

Սանուցվում է Վայերշտրասի թեորեմի ընդհանրացում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. А. Григорян*, ДАН АрмССР, т. 71 № 2 (1980). [2] *R. Arens, I. Singer* T.A.M.S., v 81, № 2. p. 379—383 (1950).