

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Баблоян, Л. М. Варданян

Температурная задача для усеченного клина

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 2/XII 1988)

Разработана методика решения температурных задач для однородного или составного усеченного клина при произвольных граничных условиях. По предложенной методике решаются гармонические и би-гармонические граничные задачи. Ввиду простоты гармонических задач методика решения иллюстрируется на них.

Аналогичным вопросам посвящены работы (1-5).

1. Определим гармоническую функцию в области усеченного клина, когда на границе заданы значения неизвестной функции $U(r, \varphi)$ (рис. 1)

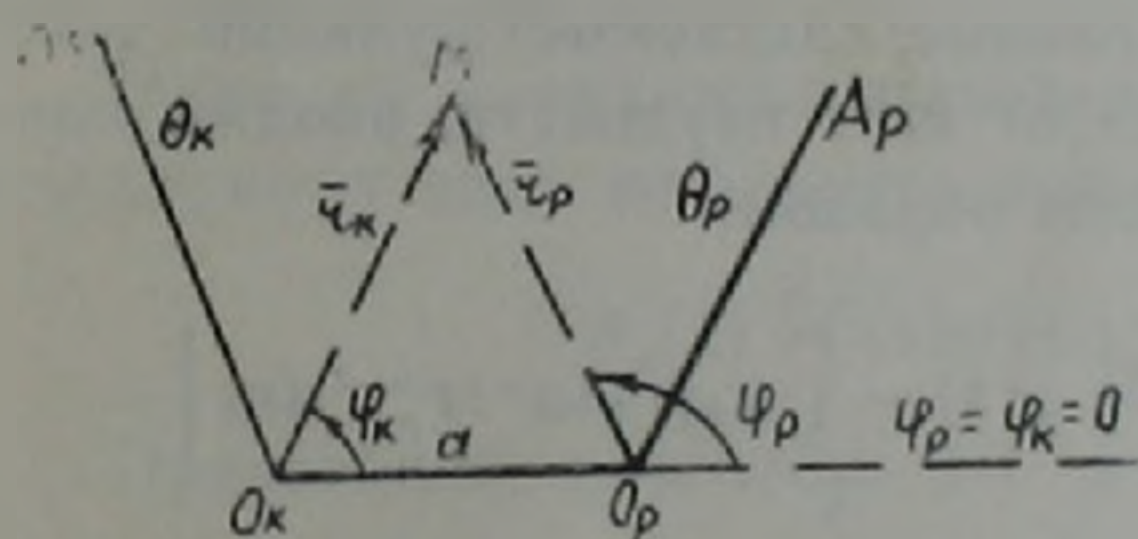


Рис. 1

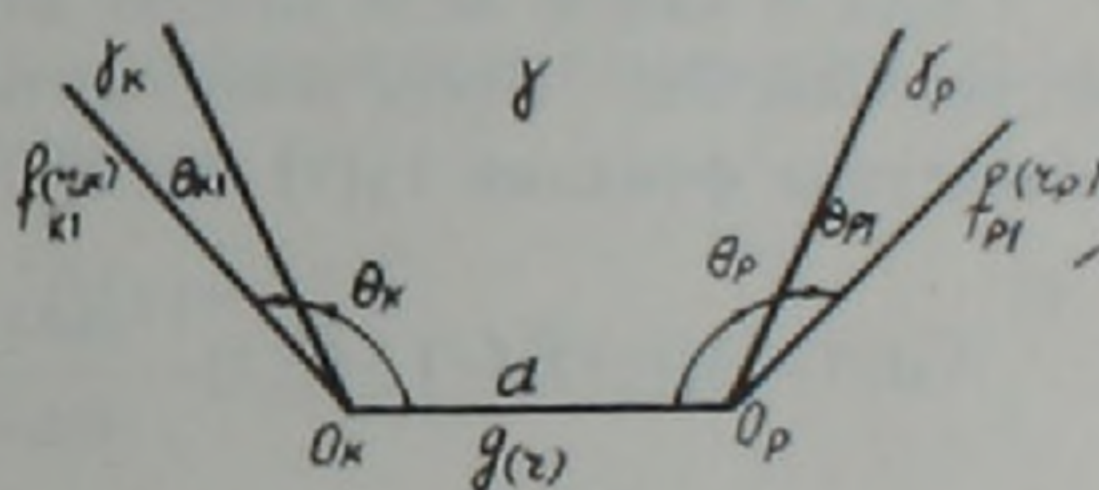


Рис. 2

$$U(r, \theta_k) = f_k(r_k) \quad (0 \leq r_k < \infty; k = 1, 2); \quad (1.1)$$

$$U(r, 0) = g(r) = g_k(r_k) + g_p(r_p) \quad (k, p = 1, 2). \quad (1.2)$$

Введем две системы полярных координат с центром O_k и O_p соответственно (рис. 1). Связь между ними имеет вид

$$r_k e^{i\varphi_k} + r_p e^{-i\varphi_p} = a, \quad (1.3)$$

где $\varphi_k = \varphi_k$; $\varphi_p = \pi - \varphi_p$; $\theta_k + \theta_p > \pi$; $0 < \theta_k, \theta_p \leq \pi$.

Решение рассматриваемой задачи ищем в виде

$$U(r, \varphi) = \sum_{k=1}^2 U_k(r_k, \varphi_k) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} \Phi(s, \varphi_k) r_k^{-s} ds, \quad (1.4)$$

где $\Phi_k(s, \varphi_k) \sin s \theta_k = a^s X_k(s) \sin s \varphi_k + B_k(s) \sin s(\theta_k - \varphi_k)$.

Здесь $f_k(r_k)$ — финитная функция, $g_k(r_k)$ ($k = 1, 2$) интегрируемые функции (одна из них произвольная). Из условия (1.2) получаем соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} B_k(s) r_k^{-s} ds = g(r) = \sum_{k=1}^2 g_k(r_k) \quad (0 \leq r_k \leq a) \quad (1.5)$$

Пользуясь свободой, требуем, чтобы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} B_k(s) r_k^{-s} ds = g_k(r_k) \quad (0 \leq r_k \leq a) \quad (1.6)$$

Примем здесь $g_k(r_k) = 0$; $(r_k > a)$.

В работе доказывається, что любое другое продолжение функции $g_k(r_k)$ на область $[a, \infty)$, а также выбор представления (1.2) не влияет на окончательные интегральные уравнения и на вид неизвестной функции $U(r, \varphi)$. Из условия (1.1) получаем два интегральных уравнения для определения функций $X_k(s)$ ($k=1,2$), которые имеют вид

$$X_k(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{B(s, \xi - s)}{\sin \xi \theta_p} [X_p(\xi) \sin s \varepsilon_k + a^{-s} B_p(\xi) \sin(\xi \theta_p - s \varepsilon_k)] d\xi = \tilde{f}_k(s), \quad (0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \xi) \quad (1.7)$$

где $\tilde{f}_k(s) = a^{-s} \int_0^a f_k(r_k) r_k^{s-1} dr_k$; $\tilde{g}_k(s) = a^{-s} \int_0^a g_k(r_k) r_k^{s-1} dr_k$

Сюда в явном виде входят отдельные слагаемые функции $g(r)$ и их продолжения. Чтобы освободиться от этих неудобств, вводим новые неизвестные функции $Y_k(s)$ следующим образом:

$$X_k(s) = A_k^*(s) \tilde{Y}_k(s) + \tilde{f}_k^*(s) - \frac{\sin s \varepsilon_k}{\sin s \pi} \left[\tilde{g}(s) - \int_0^\infty g_k(r_k) a^{-s} r_k^{s-1} dr_k \right] - \frac{\sin s \theta_k}{\sin s \pi} \int_a^\infty g_p(r_p) a^{-s} (r_p - a)^{s-1} dr_p, \quad (1.8)$$

где $A_k^*(s)$ — нормирующий множитель, $\tilde{f}_k^*(s)$ — произвольная функция.

При этом интегральные уравнения примут окончательный вид

$$A_k^*(s) \tilde{Y}_k(s) + \frac{\sin s \varepsilon_k}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{B(s, \xi - s)}{\sin \xi \theta_p} [A_p^*(\xi) \tilde{Y}_p(\xi) + \tilde{f}_p^*(\xi) - \frac{\sin \xi \varepsilon_p}{\sin \xi \pi} \tilde{g}(\xi)] d\xi = \tilde{f}_k(s) - \tilde{f}_k^*(s) \quad (1.9)$$

а гармоническая функция определяется по формулам

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^2 \int_{L_p} \left[A_p^*(\xi) \tilde{Y}_p(\xi) + \tilde{f}_p^*(\xi) - \frac{\sin \xi \varepsilon_p}{\sin \xi \pi} \tilde{g}(\xi) \right] \frac{\sin \xi \bar{\varphi}_p}{\sin \xi \theta_p} \left(\frac{a}{r_p} \right)^\xi d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{k,p}} \frac{\sin(\pi - \bar{\varphi})}{\sin s \pi} \tilde{g}(s) \left(\frac{a}{r_k} \right)^s ds = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^2 \int_{L_p} \left\{ [A_p^*(\xi) \tilde{Y}_p(\xi) + \tilde{f}_p^*(\xi)] \sin \xi \bar{\varphi}_p + \right.$$

$$+ \bar{g}(\frac{z}{a}) \sin \frac{\varepsilon}{2} (\theta_p - \bar{\varphi}_p) \Big\} \frac{a^s r^{-s}}{\sin \frac{\varepsilon}{2} \theta_p} d\bar{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{k,p}} \frac{\sin(\pi - \bar{\varphi}_k)}{\sin s\pi} \bar{g}(s) \left(\frac{a}{r_k}\right)^s ds, \quad (1.10)$$

где
$$a^s \bar{g}(s) = \int_0^a [g_k(r_k) + g_p(a - r_k)] r_k^{s-1} dr_k,$$

Здесь последние слагаемые являются решением уравнения Лапласа для полуплоскости, когда $U(r, \varphi) = g(r)$ на отрезке $(0, a)$, а вне этого отрезка $U(r, \varphi) = 0$. На этой основе последние слагаемые не зависят от индекса k .

Если в системе (1.10) примем

$$A_k^*(s) = \frac{\sin s\varepsilon_k}{\sin s\pi}; \quad \bar{f}_k^*(s) = \bar{f}_k(s), \quad (1.11)$$

то неизвестные функции интегральных уравнений представляются в виде

$$a^s \bar{Y}_k(s) = \int_0^\infty Y_k(r_k) r_k^{s-1} dr_k, \quad (1.12)$$

т. е. функция $Y_k(r_k)$ является в этом случае продолжением граничной функции $g(r_k)$.

Один из вариантов приведения интегральных уравнений (1.9) к регулярному виду получается применением

$$A_k^*(s) = \Gamma(s) \sin s\varepsilon_k; \quad \bar{f}_k^*(s) = \bar{f}_k(s). \quad (1.13)$$

Представляя при этом

$$\bar{Y}_k(s) = \int_0^\infty U_k(r) r^{s-1} dr, \quad (1.14)$$

получаем систему интегральных уравнений ($k+p=3, k=1, 2$)

$$U_k(r) + e^{-\frac{1}{r}} \int_0^\infty \frac{U_p(t) t^{p-1} r^{1/p} t^{1/p-1} \sin \gamma_p \varepsilon_p dt}{r^{2\gamma_p+2} (rt)^{1/p} \cdot \cos \gamma_p \varepsilon_p + t^{2\gamma_p}} = 0, \quad \gamma_p = \frac{\pi}{\theta_p}. \quad (1.15)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int_0^\infty K_k(r, t) dt = e^{-\frac{1}{r}} \cdot \frac{\varepsilon_p}{\theta_p}, \quad (1.16)$$

поэтому система (1.15) регулярна при $\theta_k, \theta_p > \frac{\pi}{2}$ ($k=1, 2; k+p=3$).

В частности, когда $\theta_k > \frac{\pi}{2}, \theta_p = \frac{\pi}{2}$, система (1.15) приводится к одному регулярному уравнению такого же вида.

Если $\theta_k = \theta_p = \frac{\pi}{2}$, то система (1.15) или (1.9) решается в замкнутом виде

$$U_k(r)(1 - e^{-\frac{2}{r}}) = F_k(r) - F_p(r)e^{-\frac{1}{r}}, \quad (1.17)$$

$$\text{где } \bar{F}_k(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{\Gamma(\xi - s)}{\Gamma(\xi) \sin \xi \theta_p} \left| \frac{\sin \xi \theta_p}{\sin s \pi} \bar{g}(\xi) - \bar{f}_k(\xi) \right| d\xi.$$

При этом получается точное решение гармонической задачи для полуполосы в декартовой системе координат.

На основе (1.16) при условии (1.13) можно доказать, что уравнения (1.9) регулярны при $\theta_k > \frac{\pi}{4}$.

Если норму функции связывать с порядком убывания на бесконечности на контуре преобразования и учитывать значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{B(s, \xi - s)}{\sin \xi \pi} \sin(\xi \theta_p + \alpha) d\xi = \frac{\left(2 \cos \frac{\theta_p}{2}\right)^{s-1}}{\sin s \pi} \sin \left| (s+1) \frac{\theta_p}{2} + \alpha \right|, \quad (1.18)$$

нетрудно убедиться, что система 1.9 регулярна при $(0 < \theta_k, \theta_p < \pi)$.

2. Докажем, что предложенный метод успешно применяется и для решения аналогичных задач составных тел (рис. 2).

Например, если составная область образована из двух клиньев и усеченного клина (рис. 2), то, используя решение задачи, приведенной в п. 1, и решения для клиньев в виде интеграла Меллина

$$U_{k1}(r_k, \varphi_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\bar{f}_{k1}(\xi) \sin \xi (\varphi_k - \theta_k) + \bar{f}_k(\xi) \sin \xi (\theta_{k0} - \varphi_k)}{\sin \xi \theta_{k1}} \left(\frac{a}{r_k} \right)^\xi d\xi \quad (2.1)$$

и удовлетворяя граничным и контактными условиям, получим следующие соотношения между функциями $\bar{Y}_k(s)$ и $\bar{f}_k(s)$ ($k=1, 2$):

$$\begin{aligned} f_k(s) \Delta_k(s) &= \frac{\gamma_k}{\gamma} \bar{f}_{k1}(s) \sin s \theta_k + g_k(s) \sin s \theta_{k1} - \\ &- \left| A_k^*(s) \bar{Y}_k(s) + \bar{f}_k^*(s) - \bar{f}_k(s) \right| \frac{\sin s \pi \cdot \sin s \theta_{k1}}{\sin s \theta_k}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\bar{f}_{k1}(s)$, $\bar{g}_k(s)$ — преобразования граничных функций,

$$\gamma \Delta_k(s) = \gamma_k \sin s \theta_k \cos s \theta_{k1} + \gamma \sin s \theta_{k1} \cos s \theta_k; \quad \theta_{k0} = \theta_k + \theta_{k1}.$$

Из (1.9) и (2.2), исключая $\bar{f}_k(s)$, после некоторых преобразований для составной области получаем следующую систему интегральных уравнений:

$$X_k(s) + \frac{S_k(s)}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{B(s, \xi - s)}{\Delta_p(\xi)} \left[X_p(\xi) + \frac{\gamma_p}{\gamma} \bar{f}_{p1}(\xi) - \bar{g}_p(\xi) \frac{S_p(\xi)}{\sin \xi \pi} \right] d\xi = 0. \quad (2.3)$$

$$(0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \xi; \quad k+p=3; \quad k=1, 2)$$

Сведение интегральных уравнений (2.3) производится аналогично (1.3) — (1.15).

По описанной методике решен ряд гармонических и бигармонических краевых задач, для однородных и составных клиновидных областей, при различных граничных и контактных условиях.

Ереванский политехнический
институт им. К Маркса

Ա. Ա. ՐԱԲՆՅԱՆ, Լ. Մ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

Հատած սեպի ջերմային խնդիր

Մշակված է եղանակ լուծելու համասեռ կամ անհամասեռ հատած սեպի ջերմային խնդիրներ կամայական եղրային պայմանների դեպքում:

Նշանակը լուսարանելու համար որպես օրինակ, բերվում է Դիրիխլեի խնդրի լուծումը ինչպես համասեռ, այնպես էլ բաղադրյալ հատած սեպի համար:

Խնդրի լուծումը ներկայացվում է որպես երկու «տեղական» լուծումների գումար, որոնցից յուրաքանչյուրը ներկայացվում է Մելինի ինտեգրալի տեսքով:

Խնդիրը բերվում է ռեզուլյար ինտեգրալ հավասարումների լուծման:

Առաջարկված եղանակը կիրառելի է նաև, ինչպես համասեռ, այնպես էլ բաղադրյալ հատած սեպի բիհարմոնիկ խնդիրներ լուծելու համար:

ЛИТЕРАТУРА — ՓՐԱՇԱՀՈՒՄՆԵՐ

¹ Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян, Кручение упругих тел, Наука, М., 1963. ² Н. Ф. Морозов, Математические вопросы теории трещин, Наука, М., 1984. ³ А. Ф. Злитке, Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости, Наукова думка, Киев, 1979. ⁴ В. Т. Гринченко, Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров, Наукова думка, Киев, 1978. ⁵ А. А. Баблюян, Л. М. Варданян, Задача для составной полуплоскости, ослабленной впадиной, Калинин, 1987.