УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Член-корреспондент АН Армянской ССР Б. Л. Абрамян

О некоторых парных интегральных уравнениях с функциями Бесселя, встречающихся в задачах теории упругости

(Представлено 4 XI 1988)

При рассмотрении пространственных задач теории упругости со смешанными граничными условиями с круговыми линиями раздела граничных условий возникают парные интегральные уравнения вида

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \beta^{\alpha} \psi(\beta) J_m(\beta r) d\beta &= f(r) \quad (0 < r < a); \\ \int_0^{\infty} \psi(\beta) J_m(\beta r) d\beta &= g(r) \quad (r > a), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\alpha = \pm 1$; $f(r)$ и $g(r)$ — заданные функции; $\psi(\beta)$ — искомая функция; $m = 0, 1, \dots$. Предполагается, что функции f и g и их первые производные непрерывны и ограничены в указанных интервалах.

Строгие решения для уравнений вида (1) или для их частных случаев получены в ряде работ (Н. Басбридж и др.), упоминаемых в монографиях (1,2).

Решения, полученные для уравнений (1) в большинстве этих работ, включают в себя значительные действия и не могут считаться простыми. Сравнительно простые решения получены в работах, в которых использованы содержащие функции Бесселя разрывные интегралы и интегральные уравнения Абеля.

В настоящей заметке для парных уравнений (1) простые решения получены методом ортогонализации уравнений более коротким путем. Отметим, что метод ортогонализации парных уравнений ранее был изложен в работах К. Трантера (3,4) и А. А. Баблюяна (5,6), которые его предложили при получении решений парных уравнений другого вида.

Для решения уравнений (1) при $\alpha = \pm 1$ и $\operatorname{Re} m > -\frac{1}{2}$ пользуемся значениями интегралов (*)

$$\int_0^x \frac{r^{m+1} J_m(\beta r) dr}{\sqrt{x^2 - r^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} x^{m+\frac{1}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(\beta x) \quad \beta > 0; \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{r^{1-m} J_m(\beta r) dr}{\sqrt{r^2-x^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} x^{\frac{1}{2}-m} J_{m-\frac{1}{2}}(\beta x) \quad \beta > 0. \quad (3)$$

Используя эти значения, будем иметь также

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r^{m+1} J_m(\beta r) dr}{\sqrt{x^2-r^2}} = \sqrt{\frac{\pi\beta}{2}} x^{m+\frac{1}{2}} J_{m-\frac{1}{2}}(\beta x) \quad \beta > 0; \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} \int_x^{\infty} \frac{r^{1-m} J_m(\beta r) dr}{\sqrt{r^2-x^2}} = -\sqrt{\frac{\pi\beta}{2}} x^{\frac{1}{2}-m} J_{m+\frac{1}{2}}(\beta x) \quad \beta > 0. \quad (5)$$

1. Рассмотрим уравнения (1) при $\alpha=1$.

Обе части первого уравнения из (1) умножаем на $r^{m+1}(x^2-r^2)^{-1/2}$, где $x < a$, и интегрируем полученное выражение по r в пределах от нуля до x , а обе части второго уравнения из (1) умножаем на $r^{1-m}(r^2-x^2)^{-1/2}$, где $x > a$, и интегрируем полученное выражение по r в пределах от x до бесконечности, далее полученный результат дифференцируем по x . Тогда будем иметь:

$$\int_0^{\infty} \beta \psi(\beta) d\beta \int_0^x \frac{r^{m+1} J_m(\beta r) dr}{\sqrt{x^2-r^2}} = \int_0^x \frac{r^{m+1} f(r) dr}{\sqrt{x^2-r^2}} \quad x < a; \quad (6)$$

$$\int_0^{\infty} \psi(\beta) d\beta \frac{d}{dx} \int_x^{\infty} \frac{r^{1-m} J_m(\beta r) dr}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{d}{dx} \int_x^{\infty} \frac{r^{1-m} g(r) dr}{\sqrt{r^2-x^2}} \quad x > a. \quad (7)$$

Используя здесь значения (2) и (5), получим:

$$\int_0^{\infty} \beta^{1/2} \psi(\beta) J_{m+\frac{1}{2}}(\beta x) d\beta = F_1(x) \quad (0 < x < \infty), \quad (8)$$

где введено обозначение

$$F_1(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-m-\frac{1}{2}} \int_0^x \frac{r^{m+1} f(r) dr}{\sqrt{x^2-r^2}} & x < a \\ -\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} \int_x^{\infty} \frac{r^{1-m} g(r) dr}{\sqrt{r^2-x^2}} & x > a. \end{cases} \quad (9)$$

Учитывая (9) из (8), будем иметь.

$$\begin{aligned} \psi(\beta) &= \beta^{1/2} \int_0^{\infty} x F_1(x) J_{m+\frac{1}{2}}(\beta x) dx = \\ &= \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \int_0^a x^{\frac{1}{2}-m} J_{m+\frac{1}{2}}(\beta x) dx \int_0^x \frac{r^{m+1} f(r) dr}{\sqrt{x^2-r^2}} - \end{aligned} \quad (10)$$

$$-\sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \int_a^{\infty} x^{m+\frac{1}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(\beta x) dx \frac{d}{dx} \int_x^{\infty} \frac{r^{1-m} g(r) dr}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Это решение для рассмотренных уравнений совпадает с решениями других авторов (см., например, работу Б. Нобля (6)), получивших их другими методами.

2. Для другого случая, при $\alpha = -1$, введя обозначение $D(\beta) = \beta D(\beta)$, будем иметь уравнения

$$\int_0^{\infty} D(\beta) J_m(\beta r) d\beta = f(r) \quad r < a; \tag{11}$$

$$\int_0^{\infty} \beta D(\beta) J_m(\beta r) d\beta = g(r) \quad r > a.$$

Для получения решения уравнений (11) обе части первого уравнения из (11) умножаем на $r^{m-1}(x^2-r^2)^{-1/2}$, где $x < a$, далее интегрируем полученное выражение по r в пределах от нуля до x и затем дифференцируем по x ; обе части второго уравнения из (11) умножаем на $r^{1-m}(r^2-x^2)^{-1/2}$, где $x > a$, и интегрируем полученное выражение по r в пределах от x до бесконечности. Тогда получим:

$$\int_0^{\infty} \beta^{1/2} D(\beta) J_{m-\frac{1}{2}}(\beta x) d\beta = F_2(x) \quad (0 < x < \infty), \tag{12}$$

где использованы значения (3) и (4) и введено обозначение

$$F_2(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-m-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r^{m+1} f(r) dr}{\sqrt{x^2-r^2}} & x < a \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{m-\frac{1}{2}} \int_x^{\infty} \frac{r^{1-m} g(r) dr}{\sqrt{r^2-x^2}} & x > a. \end{cases} \tag{13}$$

Учитывая (13) из (12) получим:

$$D(\beta) = \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \int_0^a x^{-m-\frac{1}{2}} J_{m-\frac{1}{2}}(\beta x) dx \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r^{m+1} f(r) dr}{\sqrt{x^2-r^2}} + \\ + \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \int_a^{\infty} x^{m+\frac{1}{2}} J_{m-\frac{1}{2}}(\beta x) dx \int_x^{\infty} \frac{r^{1-m} g(r) dr}{\sqrt{r^2-x^2}}. \tag{14}$$

Это решение для рассмотренных уравнений также совпадает с решениями других авторов.

Առաձգականության տեսության խնդիրներում հանդիպող Բեսսելի ֆունկցիաներով որոշ զույգ ինտեգրալ հավասարումների վերաբերյալ

Այս փոքրիկ հոդվածում դիտարկվում են Բեսսելի ֆունկցիաներ պարունակող որոշ տեսակի զույգ ինտեգրալ հավասարումներ, որոնք հանդիպում են խառը եզրային պայմաններով առաձգականության տեսության տարածական խնդիրների ուսումնասիրության ժամանակ, երբ եզրային պայմանների փոփոխությունը կատարվում է շրջանային զծերի վրա:

Դիտարկվող զույգ ինտեգրալ հավասարումների լուծումները կարճ ճանապարհով ստացվում են օրթոգոնալիզացիայի եղանակով, որն առաջարկված է Լեյբ Կ. Տրանտերի և Ա. Բարլոյանի ⁽³⁻⁶⁾ աշխատանքներում:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ I. N. Sneddon, Mixed boundary value Problems in potential theory. North-Holland Publ. Co. Amsterdam, John Wiley and Sons, 1966. ² Я. С. Уфлянд, Метод парных уравнений в задачах математической физики. Наука, Л., 1977. ³ С. J. Tranter, Proceed. Edinb. Math. Soc., ser. 2, v. 13, part 3, p. 267—268 (1963). ⁴ С. J. Tranter, Proceed. Glasgow Math. Assoc., v. 6, part 3, p. 136—140 (1964). ⁵ А. А. Баблюян, ДАН АрмССР, т. 39, № 3, с. 149—157 (1964). ⁶ А. А. Баблюян, ПММ, т. 28, вып. 6, с. 1015—1023 (1964). ⁷ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Наука, М., 1970. ⁸ В. Noble, Journ. Math. and Phys., v. 37, № 2, p. 128—136 (1958).