УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Д. Т. Багдасарян, А. Г. Уналян

Оценка снизу модуля произведений $B_\alpha(z, z_k)$ М. М. Джрбашяна

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 2/X 1988)

Пусть $D = \{z; |z| < 1\}$ единичный круг и $\{z_k\}_1^\infty$ счетное множество точек из этого круга, нумерованные в порядке возрастания их модулей.

На пути построения общей теории факторизации мероморфных в круге D функций, М. М. Джрбашян (1) конструктивно построил произведения $B_\alpha(z, z_k)$, зависящие от непрерывного параметра $\alpha \in (-1; +\infty)$, нули которого совпадают с $\{z_k\}_1^\infty$ и сходимость которого в круге имеет место только при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+1} < +\infty. \quad (1)$$

Эти произведения построены таким образом: во-первых, вводятся в рассмотрение две функции

$$\omega_\alpha^{(1)}(z, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+k)} \cdot \left(\frac{\zeta}{z}\right)^k \int_{|x|=1} (1-x)^\alpha x^{-k-1} dx; \quad (2)$$

$$\omega_\alpha^{(2)}(z, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+k)} \cdot \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \int_0^{|\zeta|} (1-x)^\alpha x^{k-1} dx \quad (3)$$

и, во-вторых, для любого $\zeta (0 < \zeta < 1)$ определяется функция

$$A_\alpha(z, \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp \left\{ \omega_\alpha^{(2)}(z, \zeta) - \omega_\alpha^{(1)}(z, \zeta) \right\}. \quad (4)$$

Указанные произведения определяются следующим образом:

$$B_\alpha(z, z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} A_\alpha(z, z_k). \quad (5)$$

Функция $B_\alpha(z, z_k)$ является естественным обобщением функции Бляшке $B(z, z_k)$, и в специальном случае, когда $\alpha=0$, совпадает с ним и

$$A_0(z, \zeta) = \frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z} \cdot \frac{|\zeta|}{\zeta}. \quad (6)$$

В настоящей работе доказана

Теорема 1. Если $\alpha > 0$, то при любом $\varepsilon, 0 \leq \varepsilon < 1$ имеет место

следующее неравенство:

$$|A_0(z, \bar{z})| \exp \left\{ - \text{const} \left| \frac{1-|\bar{z}|}{1-|\bar{z}|} \right|^{\alpha+1} \right\} \leq |A_\alpha(z, \bar{z})|.$$

2. Если $-1 < \alpha < 0$, то

$$|A_0(z, \bar{z})| \exp \left\{ - \text{const} \left| \frac{1-|\bar{z}|}{1-|\bar{z}|} \right|^{\alpha+1} \right\} \leq |A_\alpha(z, \bar{z})|.$$

Чтобы приступить к доказательству теоремы, сначала докажем следующую лемму:

Лемма Пусть $z, \bar{z} \in D$, $-1 < \alpha < 0$ и

$$U_\alpha(z, \bar{z}) = \int_{|\bar{z}|^2}^1 \frac{(1-x)^{\alpha+1}}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+2+k)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1+k)} \cdot \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^k \times \\ \times \int_0^{|\bar{z}|^2} (1-x)^{\alpha+1} \cdot x^{k-1} dx. \quad (7)$$

Тогда

$$\text{Re} \left\{ \log \frac{1-\bar{z}z}{|\bar{z}|^2} - U_\alpha(z, \bar{z}) \right\} \geq 0. \quad (8)$$

Доказательство. При $|\bar{z}| < 1$ имеем

$$\log \frac{1-\bar{z}z}{|\bar{z}|^2} - U_\alpha(z, \bar{z}) = \int_{|\bar{z}|^2}^1 \frac{(1-x)^{\alpha+1}}{x} dx + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{n} + \frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1+n)} \cdot \frac{1}{|\bar{z}|^{2n}} \int_0^{|\bar{z}|^2} (1-x)^{\alpha+1} \cdot x^{n-1} dx \right\} \cdot (\bar{z}z)^n = \\ = \frac{b_0(\rho)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\rho) (\bar{z}z)^n,$$

где $\rho = |\bar{z}|$,

$$b_0(\rho) = 2 \int_{\rho^2}^1 \frac{1-(1-x)^{\alpha+1}}{x} dx; \quad b_n(\rho) = -\frac{1}{n} + \frac{\Gamma(2+\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1+n)} \cdot \frac{1}{\rho^{2n}} \times \\ \times \int_0^{\rho^2} (1-x)^{\alpha+1} \cdot x^{n-1} dx, \quad n=1, 2, \dots$$

Отметим, что

$$b_n(0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} b_n(\rho) = -\frac{1}{n} + \frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1+n)} \cdot \frac{1}{n}, \quad n \neq 0, \quad b_n(1) = 0. \quad (9)$$

Покажем, что $\{b_n(\rho)\}$ удовлетворяет условиям $b_n(\rho) \geq 0$; $b_n(\rho) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$b_n(\rho) - 2b_{n+1}(\rho) + b_{n+2}(\rho) \geq 0. \quad (10)$$

При $n = 1, 2 \dots$

$$b_n(\rho) = \frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1+n)} \cdot \int_0^1 [(1-\rho^2 x)^{\alpha+1} - (1-x)^{\alpha+1}] x^{n-1} dx.$$

Так как $\alpha+1 > 0$, то $b_n(\rho) \geq 0$, $n = 0, 1, \dots$

Далее

$$b_{n+1}(\rho) - b_n(\rho) = \frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1+n)} \cdot \int_0^1 [(1-\rho^2 x)^{\alpha+1} - (1-x)^{\alpha+1}] x^{n-1} \times \\ \times \left| \frac{\alpha+2+n}{n+1} \cdot x - 1 \right| dx,$$

функция $b_{n+1}(\rho) - b_n(\rho)$ непрерывна в $0 \leq \rho \leq 1$ (см. (9)), и

$$b'_{n+1}(\rho) - b'_n(\rho) = -2 \cdot \Gamma(\alpha+1) \frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1+n)} \times \\ \times \int_0^1 (1-\rho^2 x)^\alpha \cdot \left| \frac{\alpha+2+n}{n+1} \cdot x - 1 \right| x^n dx = 0 \quad \text{при } \rho = 0.$$

Следовательно, $b_{n+1}(\rho) - b_n(\rho)$ не может принимать максимальное значение внутри $(0,1)$. Имеем $b_{n+1}(1) - b_n(1) = 0$,

$$b_{n+1}(0) - b_n(0) = \frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(n+2)} \cdot \left\{ \frac{n\alpha-1}{n(n+1)} + \frac{(n-1)!}{(\alpha+2)(\alpha+3)\dots(\alpha+n+1)} \right\}.$$

$$\text{Обозначив } f_n(x) = \frac{n\alpha-1}{n(n+1)} + \frac{(n-1)!}{(\alpha+2)(\alpha+3)\dots(\alpha+n+1)}, \quad -1 \leq x \leq 0,$$

получим $f_n(-1) = f_n(0) = 0$. Далее

$$f'_n(x) = \left| -\frac{1}{(\alpha+2)^2} + \dots + \frac{1}{(\alpha+n+1)^2} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\alpha+2} + \dots + \frac{1}{\alpha+2+n} \right)^2 \right| \frac{(n-1)!}{(\alpha+2)\dots(\alpha+1+n)} \geq 0,$$

следовательно, $f_n(x) \leq 0$, так что $b_{n+1}(0) - b_n(0) \leq 0$ и $b_{n+1}(\rho) - b_n(\rho) \leq 0$.

Далее, имеем

$$b_0(\rho) - b_1(\rho) = 2 \cdot \int_{\rho^2}^1 \frac{1-(1-x)^{\alpha+1}}{x} dx + 1 - (\alpha+2) \int_0^1 (1-\rho^2 x)^{\alpha+1} dx,$$

$$b_0(1) = b_1(1) = 0,$$

$$b'_0(\rho) - b'_1(\rho) \leq -4 \frac{1-(1-\rho^2)^{\alpha+1}}{\rho} + 4\rho(\alpha+1) \int_0^{\rho^2} (1-\rho^2 x)^{\alpha+1} dx = 0.$$

Следовательно, $b_0(\rho) \geq b_1(\rho)$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \varphi_0(\rho) &= b_0(\rho) - 2 \cdot b_1(\rho) + b_2(\rho) = 2 \cdot \int_{\rho^2}^1 \frac{1 - (1-x)^{\alpha+1}}{x} dx + \\ &+ (\alpha+2) \cdot \int_0^1 \left| (1-\rho^2 x)^{\alpha+1} - (1-x)^{\alpha+1} \right| \left(\frac{\alpha+3}{2} x - 2 \right) dx, \quad \varphi_0(1) = 0, \\ \varphi'_0(\rho) &= -\frac{4[1 - (1-\rho^2 x)^{\alpha+1}]}{\rho} - 2(\alpha+1)(\alpha+2) \int_0^1 (1-\rho^2 x)^{\alpha} \cdot x \left(\frac{\alpha+3}{2} x - 2 \right) dx = \\ &= \frac{2}{\rho} \cdot \int_0^1 [(x+2)(x+3)x^2 - 4(x+2)x + 2] d(1-\rho^2 x)^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Но так как при $\alpha+1 > 0$ функция $(1-\rho^2 x)^{\alpha+1}$ монотонно убывает по x в $0 < x < 1$ и

$$(x+2)(x+3)x^2 - 4(x+2)x + 2 \geq 4 \frac{(x+2)(x+3)}{(x+3)^2} - 4 \cdot \frac{(x+2)}{x+3} + 2 > 0,$$

то $\varphi'_0(\rho) < 0$, и $\varphi_0(\rho) \geq \varphi_0(1) = 0$.

Для $n \neq 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_n(\rho) &= \Delta^2 b_n(\rho) = \frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1+n)} \times \\ &\times \int_0^1 \left| (1-\rho^2 x)^{\alpha+1} - (1-x)^{\alpha+1} \right| x^{n-1} \left| \frac{(\alpha+2+n)(\alpha+3+n)}{(n+1)(n+2)} x^2 - 2 \cdot \frac{\alpha+2+n}{n+1} x + \right. \\ &\quad \left. + 1 \right| dx, \end{aligned}$$

$\varphi_n(1) = 0$, $\rho < 1$. Следовательно, $\varphi'_n(\rho) \neq 0$, при $0 < \rho < 1$

$$\begin{aligned} \varphi_n(0) &= -\frac{2}{n(n+1)(n+2)} + \frac{\alpha^2 n(n+1) - \alpha n(n+3) + 2n + 4}{n(n+1)^2(n+2)^2} \times \\ &\times \frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(n+3)} = \frac{\Gamma(\alpha+2+n)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(n+3)} \cdot f_n(\alpha), \end{aligned}$$

где

$$f_n(\alpha) = \frac{\alpha^2 n(n+1) - \alpha n(n+3) + 2n + 4}{n(n+1)^2(n+2)^2} - \frac{(n-2)! \cdot 2}{(\alpha+2)\dots(\alpha+n+1)}$$

Покажем, что $f_n(\alpha) \geq 0$. Имеем по индукции

$$f_1(\alpha) = \frac{2\alpha^2 - 4\alpha + 6}{6} - \frac{2}{\alpha+2} \geq 0.$$

Пусть $f_k(\alpha) \geq 0$, т. е.

$$\frac{\alpha^2 k(k+1) - \alpha k(k+3) + 2k + 4}{(k+1)(k+2)(k+3)} \geq \frac{(k-1)! \cdot 2}{(\alpha+2)(\alpha+3)\dots(\alpha+k+1)}.$$

Покажем, что

$$\frac{x^2 k(k+1) - xk(k+3) + 2k + 4}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \frac{2x^2(k+1) - 2x(k+2) + 2}{(k+1)(k+2)(k+3)} \geq$$

$$\geq \frac{x^2 k(k+1) - xk(k+3) + 2k + 4}{k(k+1)(k+2)} \cdot \frac{k}{x+k+2},$$

или

$$(x+2)|2x^2(k+1) - 2x(k+2) + 2| - (1-x)|x^2 k(k+1) - xk(k+3) + 2k + 4| \geq 0,$$

или

$$-(1-x^2)k^2 - 3x(1-x^2)k - 2x(1-x^2) \geq 0,$$

что очевидно. Отсюда следует, что $\varphi_n(0) \geq 0$. Следовательно, $\varphi_n(\rho) \geq 0$, и последовательность $\{b_n(\rho)\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (10), и по известной теореме о положительности сумм тригонометрических рядов (см. (2), с. 100) получается доказательство леммы.

Доказательство теоремы. Из (2) имеем

$$\omega_\alpha^{(1)}(z, \bar{z}) = \int_{|z|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\left(1 - \frac{\bar{z}}{x}\right)^{\alpha+1}} \cdot \frac{dx}{x},$$

отсюда при $0 < \varepsilon < 1$ получаем

$$|\omega_\alpha^{(1)}(z, \bar{z})| \leq \frac{1}{|z|} \cdot \left| \frac{1-|z|}{1-\frac{\bar{z}}{|z|}} \right|^{\alpha+\varepsilon} \cdot \int_{|z|}^1 \frac{\left(\frac{1-x}{1-|z|}\right)^{\alpha+\varepsilon}}{(1-x)^\alpha} \times$$

$$\times \left| \frac{1-\frac{\bar{z}}{|z|}}{1-\frac{\bar{z}}{x}} \right|^{\alpha+\varepsilon} \cdot \frac{dx}{\left|1-\frac{\bar{z}}{x}\right|^{1-\varepsilon}}.$$

Но так как

$$\left| \frac{1-\frac{\bar{z}}{|z|}}{1-\frac{\bar{z}}{x}} \right| = \left| 1 + \frac{\bar{z}}{|z|} \cdot \frac{|z|-x}{x-\bar{z}} \right| \leq 2,$$

то получаем

$$|\omega_\alpha^{(1)}(z, \bar{z})| \leq \text{const} \cdot \left| \frac{1-|z|}{1-\frac{\bar{z}}{|z|}} \right|^{\alpha+\varepsilon} \cdot \int_{|z|}^1 \frac{dx}{(1-x)(x-|z|)^{1-\varepsilon}} \leq \frac{\text{const}}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \cdot \left| \frac{1-|z|}{1-\frac{\bar{z}}{|z|}} \right|^{2-\varepsilon}. \quad (11)$$

При $\varepsilon = 1$ выберем $0 \leq \varepsilon_1 < 1$, такое, что $\alpha + \varepsilon_1 > 0$. Имеем

$$|\pm \omega_\alpha^{(1)}(z, \bar{z})| \leq \left| \frac{1-|z|}{1-\frac{\bar{z}}{|z|}} \right|^{\alpha+\varepsilon} \cdot \frac{1}{|z|(1-|z|)^{1-\varepsilon_1}} \cdot \int_{|z|}^1 \frac{\left(\frac{1-x}{|1-|z||}\right)^{\alpha+\varepsilon_1}}{\left|1-\frac{\bar{z}}{x}\right|} \times$$

$$\times \frac{dx}{(1-x)^{\varepsilon_1}} \leq \text{const} \cdot \left| \frac{1-|z|}{1-\frac{\bar{z}}{|z|}} \right|^{\alpha+1}. \quad (12)$$

Для оценки $\left| \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\{\omega_\alpha^{(2)}(z, \zeta)\} \right|^{-1}$ заметим, что при $0 \leq |z| < |\zeta| < 1$ имеет место (см. (1), с. 624)

$$\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) e^{\omega_\alpha^{(2)}(z, \zeta)} = \exp\left\{-\int_{|z|}^1 \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{xz}{\zeta}\right)^{\alpha+1}} - 1\right) \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx\right\}. \quad (13)$$

Но последнее равенство справедливо в D всюду, кроме точек множества

$$e(\zeta) = \{z/|\zeta| = z; \operatorname{arg} z = \operatorname{arg} \zeta\}.$$

Рассмотрим отдельно два случая:

$$1) \quad \left| \frac{1 - |\zeta|}{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

В этом случае, так как $z \in e(\zeta)$ и

$$\left|1 - \frac{xz}{\zeta}\right| = \frac{1}{|\zeta|} \left| x \left(1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}\right) - (x - |\zeta|) \right| \geq \left|1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}\right| \cdot \left|1 - \frac{x - |\zeta|}{x \left|1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}\right|}\right| \geq \frac{1}{2} \cdot \left|1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}\right|,$$

получаем

$$\left| \int_{|z|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\left(1 - \frac{xz}{\zeta}\right)^{\alpha+1}} \cdot \frac{dx}{x} \right| \leq \frac{2^{\alpha+1}}{|\zeta| \cdot \left|1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}\right|^{\alpha+1}} \int_{|z|}^1 (1-x)^\alpha dx \leq \operatorname{const} \frac{\left|1 - \frac{|\zeta|}{\bar{\zeta}z}\right|^{\alpha+\varepsilon}}{\left|1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}\right|}, \quad (14)$$

$$\left| - \int_{|z|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx \right| \leq \operatorname{const} (1 - |\zeta|)^{\alpha+1} \cdot \frac{\left|1 - \frac{|\zeta|}{\bar{\zeta}z}\right|^{\alpha+\varepsilon}}{\left|1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}\right|}. \quad (15)$$

Так что

$$\begin{aligned} \left| \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\{\omega_\alpha^{(2)}(z, \zeta)\} \right|^{-1} &\leq \exp\left\{\operatorname{const} \cdot \frac{\left|1 - \frac{|\zeta|}{\bar{\zeta}z}\right|^{\alpha+\varepsilon}}{\left|1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}\right|}\right\} \leq \frac{1}{|A_0(z, \zeta)|} \times \\ &\times \exp \cdot c \left| \frac{1 - |\zeta|}{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}} \right|^{\alpha+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (16)$$

$$2) \quad \left| \frac{1 - |\zeta|}{1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}} \right| > \frac{1}{2}.$$

Если $\alpha > 1$, то интегрированием по частям получаем

$$\omega_\alpha^{(2)}(z, \zeta) - \omega_{\alpha-1}^{(2)}(z, \zeta) = \frac{(1 - |\zeta|)^\alpha}{\alpha} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{|\zeta|}{\bar{\zeta}z}\right)^\alpha} - 1 \right]. \quad (17)$$

Пусть $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$. При $\{\alpha\} = \beta \neq 0$ по (17) получаем

$$\omega_{\alpha}^{(2)}(z, \zeta) = \frac{(1-|\zeta|)^{\alpha}}{z} \cdot \left[\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\alpha} - 1} + \dots + \frac{(1-|\zeta|)^{\beta+1}}{\beta+1} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\beta+1} - 1} + \omega_{\beta}^{(2)}(z, \zeta) \right] \right] \quad (18)$$

Если $\{\beta\}=0$, то вместо (18) получаем

$$\omega_{\alpha}^{(2)}(z, \zeta) = \omega_n^{(2)}(z, \zeta) = \frac{(1-|\zeta|)^{\alpha}}{n} \cdot \left[\frac{2}{\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\alpha} - 1} + \dots + \frac{|\zeta| \cdot z}{\zeta} \times \right. \\ \left. \times \frac{1-|\zeta|}{1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z} - \ln\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right) \right]. \quad (19)$$

Имея в виду, что

$$\left| \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\{\omega_{\alpha}^{(2)}(z, \zeta)\} \right|^{-1} = \exp \operatorname{Re} - \left\{ \log \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) + \omega_{\alpha}^{(2)}(z, \zeta) \right\},$$

по (18) получаем

$$- \left\{ \log \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) + \omega_{\alpha}^{(2)}(z, \zeta) \right\} = - \left\{ \frac{(1-|\zeta|)^{\alpha}}{\alpha} \left[\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\alpha} - 1} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1-|\zeta|)^{\beta+1}}{\beta+1} \cdot \left[\frac{1}{\left(1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\beta+1} - 1} \right] \right\} - \left\{ \log \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+1+k)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1+k)} \cdot \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \cdot \int_0^{|\zeta|} (1-x)^{\beta} x^{k-1} dx \right\} = h_{\alpha}^{(1)}(z, \zeta) + h_{\alpha}^{(2)}(z, \zeta). \quad (20)$$

Для $|h_{\alpha}^{(1)}(z, \zeta)|$ получаем

$$\operatorname{Re} h_{\alpha}^{(1)}(z, \zeta) \leq |h_{\alpha}^{(1)}(z, \zeta)| = \left| \frac{1-|\zeta|}{1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z} \right|^{\alpha} \cdot \left| \frac{1}{\alpha} \left[1 - \left(1 - \frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\alpha} \right] + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta+1} \left[\frac{1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z}{1-|\zeta|} \right]^{|\beta|-\alpha} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{|\zeta|}{\zeta}z\right)^{\beta+1} \right] \right| \leq c \cdot \left| \frac{1-|\zeta|}{1-\frac{|\zeta|}{\zeta}z} \right|^{\alpha} \leq \operatorname{const} \left| \frac{1-|\zeta|}{1-\frac{\bar{\zeta}}{|\zeta|}z} \right|^{\alpha+\beta} \quad (21)$$

Чтобы оценить $\operatorname{Re}\{h_{\alpha}^{(2)}(z, \zeta)\}$, напишем его в следующем виде:

$$h_{\alpha}^{(2)}(z, \zeta) = - \left\{ \log \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) - \log \left(1 - \frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|} \right) \right\} - \left\{ \log \frac{1-\bar{\zeta}z}{|\zeta|^{\alpha}} - \int_{|\zeta|^{\alpha}}^1 \frac{(1-x)^{\beta-1}}{x} dx + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+1+k)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1+k)} \cdot \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \cdot \int_0^{|\zeta|^{\alpha}} (1-x)^{\beta} x^{k-1} dx \right\} - \int_{|\zeta|^{\alpha}}^1 \frac{(1-x)^{\beta-1}}{x} dx -$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+1+k)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1+k)} \cdot \left(\frac{z}{|z|}\right)^k \cdot \int_{|z|^{-\beta}}^{|z|} (1-x)^{\beta} x^{k-1} dx.$$

Имеем

$$- \operatorname{Re} \left\{ \log \left(1 - \frac{z}{|z|} \right) - \log \frac{1 - \bar{z}}{|z|^2} \right\} = -\log|z| \cdot |A_0(z, \bar{z})| \leq -\log|A_0(z, \bar{z})| + \log \frac{1}{|z|}. \quad (22)$$

Далее, интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+1+k)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1+k)} \cdot \left(\frac{z}{|z|}\right)^k \cdot \int_{|z|^{-\beta}}^{|z|} (1-x)^{\beta} x^{k-1} dx &= \frac{(1-|z|)^{\beta}}{\beta} \cdot \left[\frac{1}{\left(1-\frac{|z|}{|z|}\right)^{\beta}} - 1 \right] + \\ &+ \frac{(1-|z|^2)^{\beta}}{\beta} \cdot \left[\frac{1}{\left(1-\frac{|z|^2}{|z|}\right)^{\beta}} + 1 \right] + \int_{|z|^{-\beta}}^{|z|} \frac{(1-x)^{\beta-1}}{x} \cdot \left\{ \frac{1}{\left(1-\frac{xz}{|z|}\right)^{\beta}} - 1 \right\} dx. \end{aligned}$$

но

$$\begin{aligned} \left| \int_{|z|^{-\beta}}^{|z|} \frac{(1-x)^{\beta-1}}{\left(1-\frac{xz}{|z|}\right)^{\beta}} \cdot \frac{dx}{x} \right| &\leq \frac{1}{|z|^{\beta}} \cdot \int_{|z|^{-\beta}}^{|z|} \frac{(1-x)^{\beta-1}}{\left|1-\frac{xz}{|z|}\right|^{\beta}} dx = \frac{1}{|z|} \cdot \int_{|z|}^1 \frac{(1-t|z|)^{\beta-1}}{\left|1-\frac{t|z|}{|z|}z\right|^{\beta}} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{|z|} (1-|z|)^{\beta-1} \cdot \int_{|z|}^1 \frac{dt}{(1-t)^{\beta}} = \frac{1}{|z|} \cdot \frac{1}{1-\beta} \quad (23) \end{aligned}$$

$$\int_{|z|^{-\beta}}^{|z|} \frac{(1-x)^{\beta-1}}{x} dx \leq \int_{|z|}^1 \frac{(1-x)^{\beta-1}}{x} dx \leq \frac{1}{|z|^{\beta}} \cdot \frac{(1-x)^{\beta}}{\beta} \Big|_{|z|}^1 \leq \frac{(1-|z|^2)^{\beta}}{\beta|z|^{\beta}} \leq \frac{2^{\beta}}{\beta|z|^{\beta}}. \quad (24)$$

Из (18), (21)–(24) и по лемме получаем доказательство теоремы при $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$.

При $\alpha = [\alpha] = n$ из (19) получаем

$$\begin{aligned} - \left\{ \log \left(1 - \frac{z}{|z|} \right) + \omega_n^{(2)}(z, \bar{z}) \right\} &= - \left\{ \log \left(1 - \frac{z}{|z|} \right) - \log \frac{1 - \bar{z}}{|z|^2} \right\} - \left\{ \log \frac{1 - \bar{z}}{|z|^2} - \right. \\ &\left. - \log \left(1 - \frac{\bar{z}}{|z|} \right) \right\} - \left\{ \frac{(1-|z|)^n}{n} \cdot \left[\frac{1}{\left(1-\frac{\bar{z}}{|z|}\right)^n} - 1 \right] + \dots + (1-|z|) \left[\frac{1}{1-\frac{\bar{z}}{|z|}} - 1 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$\operatorname{Re} \left\{ -\log \frac{1 - \bar{z}}{|z|^2} + \log \frac{1 - \bar{z}}{|z|} \right\} = -\log \left| \frac{1 - \bar{z}}{|z| - \bar{z}} \cdot \frac{1}{|z|} \right| = \log \left| \frac{|z|(|z| - \bar{z})}{1 - \bar{z}} \right| \leq 2.$$

При $-1 < \alpha < 0$ из (17) получаем

$$\omega_{\alpha}^{(1)}(z, \bar{z}) = \omega_{\alpha+1}^{(2)}(z, \bar{z}) - \frac{(1-|z|)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \left[\frac{1}{\left(1-\frac{\bar{z}}{|z|}\right)^{\alpha+1}} - 1 \right]. \quad (25)$$

Так что

$$-\left\{\log\left(1-\frac{z}{z_0}\right)+\omega_a^{(2)}(z, z_0)\right\}=-\left\{\log\left(1-\frac{z}{z_0}\right)+\omega_{a+1}^{(2)}(z, z_0)\right\}+ \\ +\frac{(1-|z|)^{a+1}}{a+1}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{z}{z_0}\right)^{a+1}}-1\right].$$

и доказательство в этом случае аналогично вышесказанному.

Авторы благодарят профессора В. С. Захаряна за постановку задачи.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Գ. Տ. ՔԱՂԻԱՍԱՐՅԱՆ, Ա. Կ. ՀՈՒՆԱՆՅԱՆ

Մ. Մ. Զրբաշյանի $B_a(z; z_k)$ արտադրյալների մոդուլի գնահատական ներկերից

Աշխատանքում ապացուցվում է թեորեմ, որտեղ տրված է Մ. Մ. Զրբաշյանի

$B_a(z; z_k) = \prod_1 A_a(z; z_k)$ զուգամետ արտադրյալների մոդուլի գնահատական ներքերից:

Այն է.

Թեորեմ 1) Երբ $\alpha > 0$, ապա ցանկացած ε -ի համար ($0 \leq \varepsilon \leq 1$), սեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$|A_0(z; z_0)| \exp\left\{-\text{const} \left|\frac{1-|z|}{1-\frac{z}{z_0}}\right|^{\alpha+\varepsilon}\right\} \leq |A_a(z; z_0)|:$$

2) Երբ $-1 < \alpha < 0$, ապա՝

$$|A_0(z; z_0)| \exp\left\{-\text{const} \left|\frac{1-|z|}{1-\frac{z}{z_0}}\right|^{\alpha+1}\right\} \leq |A_a(z; z_0)|:$$

Այս թեորեմի ապացույցը էապես հիմնվում է հետևյալ լեմայի վրա՝
Լեմա 1) Ենթադրենք $z, z_0 \in D$, $-1 < \alpha < 0$, և

$$U_a(z; z_0) = \int_{|z|}^1 \frac{(1-x)^{\alpha+1}}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k+2)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(1+k)} \cdot \left(\frac{z}{z_0}\right)^k \int_0^{|z|} (1-x)^{\alpha+1} x^{k-1} dx:$$

Այդ դեպքում

$$\text{Re} \left\{ \log \frac{1-\bar{z}z_0}{|z|^2} - U_a(z; z_0) \right\} \geq 0:$$

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԾԱՆՔՆԵՐ

1 М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Наука, М., 1966. 2 Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. Физматгиз, М., 1961.