ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 88 1989 №2

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Н. Акопян

## Об одной контактной задаче для упругого клина, усиленного жестким включением

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 28/VI 1988)

Основные результаты по исследованию обширных классов контактных и смешанных задач теории упругости для клиновидных тел подытожены в [1]. В этом направлении укажем также на [2–5].

В настоящей работе рассматривается задача о контакте двух одинаковых симметрично расположенных гладких штампов с упругим клином, который на некотором отрезке своей срединной линии усилен абсолютно жестким включением. Задача математически формулируется в виде системы двух интегральных уравнений, решаемой методом ортогональных многочленов Чебышева.

1. Пусть упругий клин с углом раствора $2\alpha$ на отрезке $[a, b]$ своей срединной линии $\varphi=0$ усилен абсолютно жестким тонким включением и деформируется двумя одинаковыми, симметрично расположенными на гранях клина $\varphi=-\alpha$ и $\varphi=\alpha$ гладкими штампами.

Необходимо определить контактные напряжения под штампами и на линии стыка включения с клином.

Ввиду симметрии относительно линии $\varphi=0$ будем рассматривать только верхнюю часть клина, для которой будут иметь место следующие граничные условия:

$$\begin{gathered}
u_\varphi(r, 0)=\tau_{r\varphi}(r, \alpha)=0 \quad (0<r<\infty); \\
\tau_{r\varphi}(r, 0)=0 \quad (0<r<a;\ b<r<\infty); \\
u_r(r, 0)=0 \quad (a<r<b); \\
\sigma_\varphi(r, \alpha)=0 \quad (0<r<a_1;\ \ b_1<r<\infty); \\
u_\varphi(r, \alpha)=f(r) \quad (a_1<r<b_1),
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $f(r)$ — известная функция, описывающая основание штампа.

Чтобы построить решение этой смешанной краевой задачи, сначала определим радиальные перемещения $u_r$ точек линии $\varphi=0$ и нормальные перемещения точек линии $\varphi=\alpha$ от неизвестных нормальных контактных напряжений $q(r)$, действующих под штампом, и касательных контактных напряжений $\tau(r)$, действующих на линии соединения включения с клином. Решение этой вспомогательной задачи легко построить при помощи преобразования Меллина [2]. Затем подставим полученные выражения перемещений в третье и пятое условия (1.1), предварительно продифференцировав их по $r$. Перейдя в первом из полученных уравнений к новым переменным по формулам $r_0=\exp(ds+$

$+c)$; $r=\exp(dx+c)$, а во втором – по формулам $r_0=\exp(d_1 s+c_1)$; $r=\exp(d_1 x+c_1)$ и введя обозначения

$$\varphi(s)=\exp(ds+c)f[\exp(ds+c)]/p_0; \quad \psi(s)=\exp(d_1 s_1+c_1)g[\exp(d_1 s+c_1)]/p_0;$$

$$F(s)=\exp(d_1 s+c_1)f'[\exp(d_1 s+c_1)]/\vartheta_2 p_0; \quad d=\frac{1}{2}\ln(b/a); \quad d_1=\frac{1}{2}\ln(b_1/a_1);$$

$$c=\frac{1}{2}\ln(a\cdot b); \quad c_1=\frac{1}{2}\ln(a_1\cdot b_1),$$

придем к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{s-x}-R_{11}(x,s)\right]\varphi(s)ds+\int_{-1}^{1}R_{12}(x,s)\psi(s)ds=0;\\ &\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{s-x}-R_{21}(x,s)\right]\psi(s)ds+\int_{-1}^{1}R_{22}(x,s)\varphi(s)ds=-F(x).\end{aligned} \qquad (1.2)$$

При этом должны удовлетворяться условия равновесия включения, штампа и условие гладкого контакта

$$d_1\int_{-1}^{1}\psi(s)ds=1; \quad \int_{-1}^{1}\varphi(s)ds=0; \quad \psi(\pm 1)=0. \qquad (1.3)$$

В систему уравнений (1.2) введены обозначения

$$R_{11}(x,s)=-\frac{2d}{\varkappa}\int_0^\infty\left[\varkappa\,\mathrm{sh}^2\alpha z+z^2\sin^2\alpha+\varkappa_1^2-\frac{\varkappa\Delta(z)}{2}\right]\frac{\sin z(x-s)}{\Delta(z)}dz;$$

$$R_{12}(x,s)=\frac{d_1}{\varkappa_1}\left\{\frac{\sin\alpha}{2(\lambda+\mu)(2\alpha+\sin 2\alpha)}-\frac{\varkappa}{\pi\mu}\int_0^\infty\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha z\frac{\cos z(d_1 s-dx+c_1-c)}{\Delta(z)}dz+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi(\lambda+\mu)}\int_0^\infty\left[\frac{\lambda+\mu}{\mu}\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha z-\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,\alpha z\right]\frac{\sin(d_1 s-dx+c_1-c)z}{\Delta(z)}dz\right\};$$

$$R_{21}(x,s)=\frac{d_1(1-\cos 2\alpha)}{2(2\alpha-\sin 2\alpha)}+d_1\int_0^\infty[\mathrm{ch}\,2\alpha z-\cos 2\alpha-\Delta(z)]\sin z(sd_1-dx+c_1-c)\frac{dz}{\Delta(z)};$$

$$R_{22}(x,s)=\frac{d}{\vartheta_2}\left\{\frac{\varkappa_1}{\pi\mu}\int_0^\infty\mathrm{ch}\,2\alpha z\frac{\sin z(ds-d_1 x+c-c_1)}{\Delta(z)}dz+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\int_0^\infty[2\mu\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha z-2(\lambda+\mu)z\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,\alpha z]\frac{\cos z(ds-d_1 x+c-c_1)}{\Delta(z)}dz\right\};$$

$$\Delta(z)=\mathrm{sh}\,2\alpha z+z\sin 2\alpha; \quad \varkappa=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu};$$

$$\vartheta_1=\frac{\varkappa}{2\pi\mu\varkappa_1};\quad \vartheta_2=\frac{\varkappa_1}{2\pi\mu}.$$

2. Решение системы уравнений (1.2) представим в виде бесконечных рядов

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{n=0}^{\infty}X_n^{(1)}T_n(x);\quad \psi(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{n=0}^{\infty}X_n^{(2)}T_n(x),\tag{2.1}$$

где $T_n(x)$ $(n=0, 1, 2...)$ — многочлены Чебышева первого рода, а $X_n^{(i)}$ $(i=1, 2;\ n=0, 1, 2, ...)$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя выражения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из (2.1) в систему (1.2), используя известное соотношение

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(s)ds}{(s-x)\sqrt{1-s^2}}=\pi U_{n-1}(x)\quad (n=1, 2, \ldots)\tag{2.2}$$

и условие ортогональности многочленов Чебышева, по известной процедуре придем к следующей эквивалентной системе бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$X_m^{(i)}-\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}^{(i,j)}X_n^{(j)}=C_m^{(i)}\quad (i=1, 2;\ m=1, 2, \ldots);\tag{2.3}$$

$$C_m^{(i)}=a_m^{(i)}+\sum_{j=1}^{2}A_{m,0}^{(i,j)}X_0^{(j)}\quad (i=1, 2);\quad a_m^{(1)}=0;$$

$$a_m^{(2)}=\frac{2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}F(x)\sqrt{1-x^2}\,U_{m-1}(x)dx,$$

где $U_n(x)$ $(n=1, 2, ...)$ — многочлены Чебышева второго рода, а ядра $A_{m,n}^{(i,j)}$ $(i, j=1;\ m, n=1, 2, ...)$ бесконечных систем представляют собой интегралы от произведения регулярных функций с функциями Бесселя первого рода $J_m(x)$ и $J_n(x)$, явные выражения которых здесь не приводятся. Далее следуя работе ([6]) легко доказать, что система (2.3) квазивполне регулярна.

Теперь заметим, что в правые части системы (2.3) входят неизвестные коэффициенты с нулевыми индексами, которые сразу определяются из первых двух условий (1.3). Они имеют вид

$$X_0^{(1)}=0;\quad X_0^{(2)}=1/\pi d_1\tag{2.4}$$

Следующие два условия (1.3) служат для определения размеров контактной зоны, т. е. параметров $a_1$ и $b_1$, и эквивалентны следующим уравнениям:

$$\sum_{n=0}^{\infty}X_n^{(2)}=0;\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n X_n^{(2)}=0.\tag{2.5}$$

3. Отметим, что из рассмотренной здесь задачи при частных значениях $a$ получаются решения некоторых известных задач, а также некоторых новых задач, представляющих самостоятельный интерес.

Например, при $\alpha=\pi/2$, когда включение отсутствует, из (1.2) получается интегральное уравнение, которое описывает известную задачу о контакте двух симметрично расположенных штампов с полуплоскостью. В случае $\alpha=\pi$ и $f(r)=\mathrm{const}$ получается контактная задача для плоскости, усиленной жестким включением и ослабленной полубесконечной щелью, на берегах которой действуют жесткие штампы, имеющие плоские основания. В этой задаче представляет интерес изменение коэффициента интенсивности $K$ разрушающих напряжений $\sigma_\varphi(r, 0)$ в концевой точке щели в зависимости от расстояний между штампами и включением от этой точки. Аналитически эта зависимость дается формулой

$$K=\frac{p_0}{2}\left\{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{\ln(b/a)}{(a\cdot b)^{1/4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_n[\ln(b/a)/4]X_n^{(1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\ln(b_1/a_1)}{(a_1\cdot b_1)^{1/4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_n[\ln(b_1/a_1)/4]X_n^{(2)}\right\}, \tag{3.1}$$

где $I_n(x)$ ($n=0, 1, 2, \ldots$) — функция Бесселя мнимого аргумента.

Далее, если считать, что в указанной задаче включение отсутствует, то из (1.2) придем к следующему известному интегральному уравнению для определения контактных напряжений:

$$\int_{a_1}^{b_1}\frac{\sqrt{r_0}\,q(r_0)}{(r_0-r)}\,dr_0=0, \tag{3.2}$$

которое допускает замкнутое решение в виде

$$q(r)=-\frac{p_0\sqrt{b_1}}{K(k)\sqrt{r(r-a_1)(r-b_1)}}\,; \quad \left(k=\sqrt{1-a_1/b_1}\right). \tag{3.3}$$

Для разрушающих напряжений $\sigma_\varphi(r, 0)$ и коэффициента интенсивности $K$ получаются соответственно следующие выражения:

$$\sigma_\varphi(r, 0)=-\frac{p_0\sqrt{b_1}}{2K(k)\sqrt{r(r+a_1)(r+b_1)}}\,; \quad K=\frac{p_0}{2\sqrt{a_1}\,K(k)}\,. \tag{3.4}$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Из (3.4) видно, что когда $a_1\to 0$, т. е. когда штамп приближается к концевой точке щели, коэффициент интенсивности $K$ возрастает.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ն. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

## Կոշտ ներդրակով ուժեղացված առաձգական սեպի համար մի կոնտակտային խնդրի մասին

*Դիտարկված է երկու միատեսակ համաչափորեն դասավորված ողորկ շտամպների և առաձգական սեպի կոնտակտային խնդիրը, երբ վերջինս իր միջին գծի ինչ որ հատվածում ուժեղացված է բացարձակ կոշտ ներդրակով:*

*Խնդիրը մաթեմատիկորեն ձևակերպված է երկու ինտեգրալ հավասարումների համակարգի ձևով, որի լուծումը կառուցված է Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների օգնությամբ։*

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] Развитие теории контактных задач в СССР, М., Наука, 1976. [2] *Я. С. Уфлянд*, Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1963. [3] *И. Снеддон*, Преобразования Фурье, ИЛ, М., 1955. [4] *И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко*, Неклассические смешанные задачи теории упругости, Наука, М., 1974. [5] *К. С. Чобанян*, Напряжения в составных упругих телах, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1987. [6] *Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян*, Известия АН АрмССР Механика, т. 25, № 2, (1972).