ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 88 1989 №2

УДК 512.55+512.58

МАТЕМАТИКА

Г. Г. Эмин

Предрадикалы в категории модулей над всеми кольцами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 24/XII 1987)

Рассматривается категория Mod. Объекты этой категории — всевозможные пары (A, U), где U — ассоциативное кольцо, не обязательно с единицей, A — правый U-модуль. Множество морфизмов модуля (A, U) в модуль (B, V) состоит из пар (φ_A, φ_U), где φ_A — гомоморфизм абелевой группы A в абелеву группу B, а φ_U — гомоморфизм кольца U в кольцо V, причем $(a\cdot u)\varphi_A = a\varphi_A\cdot u\varphi_U$ для любых $a\in A$, $u\in U$. Такая пара называется гомоморфизмом модуля (A, U) в модуль (B, V). Умножение морфизмов происходит покомпонентно (с. ([1])).

Определение. Скажем, что в категории Mod определен *предрадикал* r, если каждому модулю $(A, U)\in Mod$ поставлен в соответствие его идеал $r(A, U)$ так, что для любого гомоморфизма $(\varphi_A, \varphi_U):(A, U)\to(B, V)$ категории Mod имеет место соотношение $r(A, U)(\varphi_A, \varphi_U)\subseteq r(B, V)$.

Другими словами предрадикал r — это нормальный подфунктор тождественного функтора $Id_{Mod}: Mod\to Mod$.

Пусть в категории Mod определен некоторый предрадикал r. Рассмотрим полную подкатегорию $Mod(As)$ категории Mod, объектами которой являются все модули вида (O, U). Поскольку любые идеалы и любые гомоморфные образы объектов из $Mod(As)$ сами лежат в подкатегории $Mod(As)$, то нетрудно убедиться, что предрадикал r индуцирует вполне определенный предрадикал $\bar{r}$ в подкатегории $Mod(As)$, а это означает, что предрадикал r определяет вполне определенный предрадикал R в категории ассоциативных колец As, причем $r(O, U)=(O, R(U))$. Все сказанное выше остается верным и для полной подкатегории $Mod(Ab)$ категории Mod, объектами которой являются все модули вида (A, O). Поэтому предрадикал r определяет вполне определенный предрадикал R_0 категории абелевых групп Ab, причем $r(A, O)=(R_0(A), O)$.

Лемма 1. *Пусть r — произвольный предрадикал в Mod, (A, U) — некоторый модуль и $r(A, U)=(A', U')$. Тогда $U'=R(U)$, где R — предрадикал категории As, индуцированный предрадикалом r категории Mod.*

Доказательство. Поскольку r — предрадикал и (O, U) — подмодуль модуля (A, U), то $(O, R(U))=r(O, U)\subseteq r(A, U)=(A', U')$. Значит, $R(U)\subseteq U'$. Для гомоморфизма же $(o, 1_U):(A, U)\to(O, U)$ имеем, что $(A', U')(o, 1_U)=r(A, U)(o, 1_U)\subseteq r(O, U)=(O, R(U))$, т. е. $U'\subseteq R(U)$. Лемма доказана.

Пусть r — произвольный предрадикал категории *Mod*, (A, U) — некоторый модуль и $r(A, U)=(A', U')$. Поскольку (A', U') — идеал модуля (A, U) (напомним, что подмодуль (A', U') модуля (A, U) тогда и только тогда будет идеалом, когда U' — идеал кольца U и выполнены включения $A'\cdot U\subseteq A'$, $A\cdot U'\subseteq A'$), то A' — U-подмодуль U-модуля A. Покажем, что сопоставление каждому U-модулю A его U-подмодуля A' определяет предрадикал R_U в категории правых U-модулей $Mod-U$.

Пусть A и B — некоторые U-модули, $\varphi: A\to B$ — U-гомоморфизм и $r(A, U)=(A', U')$, $r(B, U)=(B', U')$, где $U'=R(U)$, в силу леммы 1. Покажем, что $A'\varphi\subseteq B'$. Действительно, поскольку $(\varphi, 1_U):(A, U)\to(B, U)$-гомоморфизм в *Mod*, то $(A', U')(\varphi, 1_U)=r(A, U)(\varphi, 1_U)\subseteq r(B, U)=(B', U')$. Значит, $A'\varphi\subseteq B'$. Таким образом, для любого U-модуля A, если $r(A, U)=(A', U')$, сопоставление U модулю A его U-подмодуля $R_U(A)=A'$ определяет предрадикал R_U в категории $Mod-U$.

Итак, нами доказана следующая

Лемма 2. *Каждый предрадикал r категории Mod индуцирует вполне определенный предрадикал R в категории As и предрадикалы R_U в категориях $Mod-U$ ($U\in As$), причем $r(A, U)=(R_U(A), R(U))$ для каждого модуля (A, U) категории Mod.*

Пусть R — некоторый предрадикал категории As, а R_U ($U\in As$) — некоторые предрадикалы категорий $Mod-U$. Рассмотрим систему предрадикалов $\{R; R_U|U\in A\}$.

Определение. Систему предрадикалов $\{R; R_U|U\in As\}$ назовем *согласованной*, если она удовлетворяет следующим условиям:

(P1) $A\cdot R(U)\subseteq R_U(A)$ *для любого U модуля A;*

(P2) $R_U(B_\varphi)\subseteq R_V(B)$ *для любого V-модуля B и U-модуля B_φ, полученного из модуля B отступлением вдоль гомоморфизма колец $\varphi: U\to V$ (см.* [1], *с.* 212).

Теорема 1. *Пусть в категории Mod определен предрадикал r. Тогда он индуцирует в категории As предрадикал R, а на каждой категории $Mod-U$ ($U\in As$) — такие предрадикалы R_U, что система предрадикалов $\{R; R_U|U\in As\}$ является согласованной. Обратно, каждая согласованная система предрадикалов $\{R; R_U|U\in As\}$ определяет вполне определенный предрадикал r в категории Mod, а именно, $r(A, U)=(R_U(A), R(U))$ для каждого модуля $(A, U)\in Mod$. Указанное соответствие между всеми предрадикалами категории Mod и всеми согласованными системами предрадикалов взаимно-однозначно.*

Доказательство. Пусть в категории *Mod* определен предрадикал r. Этот предрадикал, в силу леммы 2, определяет вполне определенную систему предрадикалов $\{R; R_U|U\in As\}$. Поскольку $r(A, U)=(R_U(A), R(U))$ — идеал модуля (A, U), то $A\cdot R(U)\subseteq R_U(A)$. Условие (P1) выполнено.

Пусть B — V-модуль, $\varphi: U\to V$ — гомоморфизм колец и B_φ — U-модуль, полученный из V-модуля B отступлением вдоль φ. Поскольку пара $(1, \psi):(B_\psi, U)\to(B, V)$ — гомоморфизм в Mod, то имеет место включение $(R_U(B_\psi), R(U))(1, \psi) = r(B_\psi, U)(1, \psi)\subseteq r(B, V) = (R_V(B), R(V))$.

Обратно, пусть задана некоторая согласованная система предрадикалов $\{R; R_U | U\in As\}$. Поскольку $R(U)$ — идеал кольца U, $R_U(A)$ — подмодуль U-модуля A и $A\cdot R(U)\subseteq R_U(A)$ в силу условия $(P1)$, то подмодуль $(R_U(A), R(U))$ является идеалом модуля (A, U).

Пусть $(\varphi, \psi):(A, U)\to(B, V)$ — некоторый гомоморфизм. Очевидно, что $R(U)\psi\subseteq R(V)$. С другой стороны, нетрудно заметить, что гомоморфизм $(\varphi, \psi):(A, U)\to(B, V)$ разлагается в произведение гомоморфизмов $(\varphi, 1):(A, U)\to(B_\psi, U)$ и $(1, \psi):(B_\psi, U)\to(B, V)$. Поскольку R_U — предрадикал в $Mod-U$ и $(\varphi, 1)$ — U-гомоморфизм, то $R_U(A)\varphi\subseteq R_U(B_\psi)$. Из условия же $(P2)$ следует, что $R_U(B_\psi)\subseteq R_V(B)$. Получили, что $R_U(A)\varphi\subseteq R_V(B)$.

Третье утверждение теоремы легко следует из первых двух.

Определение. Предрадикал r категории Mod называется *идемпотентным*, если $r(r(A, U)) = r(A, U)$ для любого модуля (A, U).

Теорема 2. *Согласованная система предрадикалов $\{R; R_U | U\in As\}$ тогда и только тогда определяет идемпотентный предрадикал в категории Mod, когда все предрадикалы этой системы являются идемпотентными, и она удовлетворяет условию*

$(P3)$ $R_U(A) = R_{R(U)}(A)$ для любого U-модуля A.

Доказательство. Пусть r — некоторый идемпотентный предрадикал в Mod и $\{R; R_U | U\in As\}$ — соответствующая согласованная система предрадикалов. Поскольку $r(O, U) = (O, R(U))$ для любого модуля $(O, U)\in Mod(As)$, то из идемпотентности предрадикала r следует идемпотентность предрадикала R. Поэтому идемпотентность предрадикала r означает, что для любого модуля (A, U) категории Mod $(R_U(A), U') = (R_{U'}(R_U(A)), U')$, где $U' = R(U)$, т. е. $R_U(A) = R_{U'}(R_U(A))$. С другой стороны, из условия $(P2)$ следует, что $R_{U'}(R_U(A))\subseteq R_U(R_U(A))$. Значит, $R_U(A) = R_{U'}(R_U(A))\subseteq R_U(R_U(A))\subseteq R_U(A)$, т. е. $R_U(R_U(A)) = R_U(A)$ для любого U-модуля A.

Из идемпотентности r, как мы уже видели, следует, что $R_U'(A) = R_{U'}(R_U(A))$ для любого U-модуля A, где $U' = R(U)$. С другой стороны, поскольку $R_U(A)$ — U'-подмодуль U'-модуля A, то $R_{U'}(R_U(A))\subseteq R_{U'}(A)$. Значит, $R_U(A)\subseteq R_{U'}(A)$. Из условия же $(P2)$ следует, что $R_{U'}(A)\subseteq R_U(A)$.

Обратно, из условия $(P3)$, примененного к $R_U(A)$, и из идемпотентности предрадикала R_U следует, что $R_{U'}(R_U(A)) = R_U(R_U(A)) = R_U(A)$. Идемпотентность же R означает, что $R(U') = U'$. Теорема доказана.

Определение. Предрадикал r категории Mod называется радикалом, если $r((A, U)/r(A, U)) = (O, O)$ для любого модуля (A, U) категории Mod.

Теорема 3. *Согласованная система предрадикалов $\{R; R_U | U\in As\}$ тогда и только тогда определяет радикал в Mod, когда все предрадикалы этой системы являются радикалами, и она удовлетворяет условию*

(P3) $R_{\overline{U}}(A) = R_U(A_\pi)$ для любого $\overline{U}$-модуля A, где $\overline{U} = U/R(U)$, π — естественный эпиморфизм кольца U на кольцо $U/R(U)$, A_π — U-модуль, полученный из $\overline{U}$-модуля A отступлением вдоль π.*

Доказательство. Пусть r — некоторый радикал в *Mod* и $\{R; R_U|U \in As\}$ — соответствующая согласованная система предрадикалов. Очевидно, что из того, что r — радикал в *Mod*, следует, что R — радикал в *As* и, кроме того, $(R_{\overline{U}}(A/R_U(A)), R(\overline{U})) = r((A, U)/r(A, U)) = (O, O)$, т. е. $R_{\overline{U}}(A/R_U(A)) = O$ для любого модуля $(A, U) \in Mod$, где $\overline{U} = U/R(U)$. Отсюда и из условия (P2) следует, что $R_U(A/R_U(A)) = O$ для любого U-модуля A.

Пусть π — естественный эпиморфизм кольца U на кольцо $\overline{U} = U/R(U)$ и A — произвольный $\overline{U}$-модуль. Рассмотрим U-модуль A_π, в котором по определению: $a \cdot u = a * (u + R(U))$, $a \in A$, $u \in U$. Очевидно, что каждый подмодуль U-модуля A_π является подмодулем $\overline{U}$-модуля A. Поскольку $A \cdot R(U) = O$, то мы можем сделать также и обратный переход — переход к операции $*: a * (u + R(U)) = a \cdot u$, $a \in A$, $u \in U$. При этом U-модуль A_π превратится в $\overline{U}$-модуль A, подмодули и фактормодули U-модуля A_π превратятся в подмодули и фактормодули $\overline{U}$-модуля A. Рассмотрим естественный U-эпиморфизм $\theta: A_\pi \to A_\pi/R_U(A_\pi)$. Очевидно, что при переходе к операции $*$ отображение θ становится $\overline{U}$-гомоморфизмом. Поэтому, т. к. $R_{\overline{U}}$ — предрадикал в $Mod-\overline{U}$, то $R_{\overline{U}}(A)\theta \subseteq R_{\overline{U}}(A_\pi/R_U(A_\pi))$. С другой стороны, поскольку r — радикал в *Mod*, то, как мы уже указывали выше, $R_{\overline{U}}(A_\pi/R_U(A_\pi)) = O$. Значит, $R_{\overline{U}}(A)\theta = O$, т. е. $R_{\overline{U}}(A) \subseteq R_U(A_\pi)$ для любого $\overline{U}$-модуля A. Из условия же (P2) следует, что $R_U(A_\pi) \subseteq R_{\overline{U}}(A)$ для любого $\overline{U}$-модуля A.

Обратно, пусть $(A, U) \in Mod$ — произвольный модуль. Поскольку R — радикал в *As*, то $r((A, U)/r(A, U)) = (R_{\overline{U}}(A/R_U(A)), O)$. Применяя условие (P3)* к $\overline{U}$-модулю $A/R_U(A)$ и учитывая, что R_U — радикал в $Mod-U$, мы получим, что $R_{\overline{U}}(A/R_U(A) = R_U(A/R_U(A)) = O$. Теорема доказана.

Нетрудно проверить, что если r — предрадикал в *Mod*, то $r(A, U)$ содержит все r-подмодули модуля (A, U) для любого модуля (A, U) и, кроме того, класс r-радикальных модулей замкнут относительно операции взятия гомоморфных образов (см. ([2]), предложения 1.1 и 1.3). Поэтому (см ([3]), предложение 2) строгие радикалы в смысле Куроша в *Mod*, а также, очевидно, в *As* — это в точности идемпотентные радикалы.

Теорема 4. *Согласованная система предрадикалов $\{R; R_U|U \in As\}$ тогда и только тогда определяет строгий радикал в смысле Куроша, когда она удовлетворяет условию (P3) и все предрадикалы этой системы являются идемпотентными радикалами, или, что то же самое, — строгими радикалами в смысле Куроша.*

Доказательство. Покажем, что система $\{R; R_U|U \in As\}$, удовлетворяющая условиям теоремы, удовлетворяет также и условию $(P3)^{*}$.

Пусть π—естественный эпиморфизм кольца U на кольцо $\overline{U}=U/R(U)$, A—произвольный $\overline{U}$-модуль и A_{π}—U-модуль, полученный из $\overline{U}$-модуля A отступлением вдоль π. Тогда, в силу условия $(P2)$, $R_0(A)\subseteq R_U(A_{\pi})\subseteq R_{\overline{U}}(A)$. С другой стороны, из условия $(P3)$, учитывая, что R—радикал в As, следует, что $R_{\overline{U}}(A)=R_{R(\overline{U})}(A)=R_0(A)$. Получили, что $R_U(A_{\pi})=R_{\overline{U}}(A)$ для любого $\overline{U}$-модуля A. Теорема доказана.

Определение. Предрадикал r категории Mod назовем идеально наследственным, соответственно, сильно наследственным, если $r(B, V)=(B, V)\cap r(A, U)$ для любого модуля (A, U) и любого идеала, соответственно, подмодуля (B, V) модуля (A, U).

Верны следующие теоремы.

Теорема 5. *Система предрадикалов $\{R; R_U|U\in As\}$ тогда и только тогда будет определять идеально наследственный, соответственно, сильно наследственнй предрадикал в Mod, когда она удовлетворяет условию (P_1) и когда $R_U=R_0$ для любого $U\in As$, т. е. когда эта система имеет вид $\{R; R_0\}$ где R—идеально наследственный, соответственно, сильно наследственный предрадикал в As, а R_0—предкручение в Ab.*

Теорема 6. *Система предрадикалов $\{R; R_U|U\in As\}$ тогда и только тогда будет определять идеально наследственный строгий радикал в смысле Куроша в Mod, когда она удовлетворяет условию $(P1)$ и имеет вид $\{R; R_0\}$, где R—идеально наследственный строгий радикал в смысле Куроша в As, а R_0—кручение в Ab*

Известно (см. ([4]), 2.17 и ([5]), предложение 4.1), что нетривиальные кручения в категории Ab и нетривиальные сильно наследственные строгие радикалы в смысле Куроша в категории As описываются с помощью наборов простых чисел

Сильно наследственный строгий радикал категории As, соответственно, кручение категории Ab, определенное набором простых чисел Π, соответственно, набором простых чисел Λ, обозначим через R^{Π}, соответственно, через R^{Λ}_{Ab}. Верна следующая теорема.

Теорема 7. *Система предрадикалов $\{R; R_U|U\in As\}$ тогда и только тогда будет определять сильно наследственный строгий радикал в смысле Куроша в категории Mod, когда $R_U=R_0=R_{Ab}$ для любого $U\in As$, т. е. когда это система имеет вид $\{R; R_{Ab}\}$, где или $R=R^{\Pi}$, $R_{Ab}=R^{\Lambda}_{Ab}$, для некоторых наборов простых чисел Π и Λ, удоовлетворяющих условию $\Pi\subseteq\Lambda$, или $R=O_{As}$—нулевой радикал в As ($O_{As}(U)=O$ для любого $U\in As$), а R_{Ab}—произвольное кручение в Ab, или же $R_{Ab}=1_{Ab}$—тривиальное кручение в Ab ($1_{Ab}(A)=A$ для любого $A\in Ab$), а R—произвольный сильно наследственный строгий радикал в смысле Куроша в As.*

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Գ. Գ. ԷՄԻՆ

Մինչռադիկալներ բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայում

Նախորդ աշխատանքներում հեղինակին հաջողվել էր տալ բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայի խիստ ռադիկալների նկարագրությունը խիստ ռադիկալների համաձայնեցման սիստեմների միջոցով։ Պարզվում է, որ ընդհանրացնելով այդ մեթոդը, կարելի է տալ նաև բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայի մինչռադիկալների նկարագրությունը։

Մինչռադիկալների համաձայնեցված սիստեմների միջոցով նկարագրված են բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայի մինչռադիկալները, իդեմպոտենտ մինչռադիկալները, ռադիկալները, Կուրոշի-Ամիցուրի իմաստով խիստ ռադիկալները, կատարելապես ժառանգական ու ուժեղ ժառանգական մինչռադիկալներն ու ռադիկալները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Г. Эмин*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 14, № 3, с. 211—232 (1979). [2] *А. И. Кашу*, Радикалы и кручения в модулях, Штиинца, Кишинев, 1983. [3] *Е. Г. Шульгейфер*, Сиб. мат. журн., т. 7, № 6, с. 1412—1421 (1966). [4] *А. П. Мишина*, *Л. А. Скорняков*, Абелевы группы и модули, Наука, М., 1969. [5] *P. N. Stewart*, Proc. Amer. Math. Soc., v. 39, № 2, p. 273—278 (1973).