

Г. А. Сукиасян

Дефекты функций с простыми нулями и полюсами, чередующимися на системе лучей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. М. Аракелян 1/XII 1988)

Пусть $l_j = \{z : \arg z = \alpha_j; -\pi < \alpha_j \leq \pi\}$, $j = 1, \dots, n$ — система попарно различных лучей.

В данной работе исследуются дефекты функций класса $M(l_1, \dots, l_n)$ — класс мероморфных в C функций конечного порядка, нули и полюсы которых лежат на $\bigcup_{j=1}^n l_j \cup \{z=0\}$, причем на каждом l_j , $j=1, \dots, n$ они являются простыми и чередуются. При $n=1$ класс $M(l_1, \dots, l_n)$ обозначим через $M(l)$, где $l = \{z : \arg z = \alpha; -\pi < \alpha \leq \pi\}$.

Обозначим нули и полюсы функции $w(z) \in M(l_1, \dots, l_n)$, лежащие на l_j , $j=1, \dots, n$, соответственно через $\{a_k^j\}_{k=1}^\infty$, $j=1, \dots, n$ и $\{b_k^j\}_{k=1}^\infty$, $j=1, \dots, n$. Так как в силу теоремы Лейбница

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{b_k^j} - \frac{1}{a_k^j} \right| < \infty, \quad j=1, \dots, n,$$

то сходятся абсолютно и равномерно на любом ограниченном множестве комплексной плоскости произведения

$$\Pi_j(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{z}{a_k^j}}{1 - \frac{z}{b_k^j}}, \quad j=1, \dots, n.$$

Таким образом, если $w(z) \in M(l_1, \dots, l_n)$, то из (4) и известных теорем о представлении следует, что

$$w(z) = z^p e^{P_m(z)} \Pi_1(z) \times \dots \times \Pi_n(z), \quad (1)$$

где p — порядок нуля или полюса в $z=0$, $P_m(z)$ — некоторый многочлен, степень которого m не превышает порядка $w(z)$.

Теорема 1. Пусть $w(z) \in M(l_1, \dots, l_n)$ и предположим, что в (1) $m \neq 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- I) для любого $a \neq 0, \infty$ $\delta(a, w) = 0^*$;
- II) если $\rho(\Pi_1 \times \dots \times \Pi_n) = \rho > m$, то $\delta(0; w) = \delta(\infty; w) = 0$, где $\rho(j)$ — порядок функции f ;
- III) если $\rho < m$, то $\delta(0; w) = \delta(\infty; w) = 1$.

* Мы предполагаем известными основные определения и результаты теории распределения значений

Теорема 2. Пусть $w(z) \in M(l)$, $w(0) \neq 0, \infty$ и в (1) $m = 0$. Тогда для любого $a \in \bar{C}$ $\delta(a; w) = 0$.

Для доказательства этих теорем нам понадобятся две леммы.

Лемма 2. Функции $\Pi_j(z)$, $j = 1, \dots, n$ удовлетворяют следующим условиям ($z = re^{i\varphi}$):

$$I) \quad \frac{1}{5} \left| \Pi_j(ie^{ia_j}) \right| \frac{|\sin(\varphi - a_j)|}{r} \leq \left| \Pi_j(re^{i\varphi}) \right| \leq 5 \left| \Pi_j(ie^{ia_j}) \right| \frac{r}{|\sin(\varphi - a_j)|};$$

$$r > 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

$$II) \quad \frac{1}{5} \left| \Pi_j(-e^{ia_j}) \right| \frac{-\cos(\varphi - a_j)}{r} \leq \left| \Pi_j(re^{i\varphi}) \right| \leq 5 \left| \Pi_j(-e^{ia_j}) \right| \frac{r}{-\cos(\varphi - a_j)};$$

$$r > 1, \quad \frac{\pi}{2} + a_j \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} + a_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

$$III) \quad m(r; \Pi_j) + m\left(r; \frac{1}{\Pi_j}\right) = O(\ln r), \quad r \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Pi_1(z) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - \frac{z}{a_k^1}}{1 - \frac{z}{b_k^1}}$

(для $j = 2, \dots, n$ доказательство аналогичное) и предположим, что $|b^1| < |a^1|$. Обозначим через

$$\Pi^1(w) = \Pi_1(we^{ia_1}) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - \frac{w}{|a_k^1|}}{1 - \frac{w}{|b_k^1|}}$$

Из теоремы 1 ((¹), с. 398) следует, что $\operatorname{Im} \Pi^1(w) \cdot \operatorname{Im} w > 0$ при $\operatorname{Im} w \neq 0$. Тогда, применяя неравенства Каратеодори для полуплоскости ((²), с. 29, теорема 8), получим, что

$$\frac{1}{5} \left| \Pi^1(i) \right| \frac{|\sin(\arg w)|}{|w|} \leq \left| \Pi^1(w) \right| \leq 5 \left| \Pi^1(i) \right| \frac{|w|}{|\sin(\arg w)|},$$

$$|w| > 1, \quad 0 \leq \arg w \leq 2\pi.$$

Из этих неравенств вытекает (2) для $j = 1$, откуда непосредственно следует (4) для $j = 1$.

Поскольку при $\operatorname{Re} w < 0$, $\operatorname{Re} \Pi^1(w) > 0$ (это проверяется точно так же, как и неравенство $\operatorname{Im} \Pi^1(w) \cdot \operatorname{Im} w > 0$ при $\operatorname{Im} w \neq 0$), то, повторяя вышесказанное для функции $e^{\frac{\pi}{2}} \Pi^1(\xi e^{i\frac{\pi}{2}})$, получим (3) для $j = 1$ (здесь учитываем, что $\operatorname{Im}\{e^{\frac{\pi}{2}} \Pi^1(\xi e^{i\frac{\pi}{2}})\} \cdot \operatorname{Im} \xi > 0$ при $\operatorname{Im} \xi > 0$). В случае $|a^1| < |b^1|$ вместо функции $\Pi_j(z)$ нужно рассматривать функцию $1/\Pi_j(z)$ и для нее повторить доказательство.

Лемма 2. Пусть $a_1, \dots, a_m$ — произвольные комплексные числа и пусть $k(r)$ — монотонно возрастающая функция, стремящаяся к ∞ при $r \rightarrow \infty$, такая, что для достаточно больших значений r

$$\frac{\ln k(r)}{|a_m z^m|} \leq c < 1, \quad |z| = r, \quad c = \text{const}.$$

Тогда на окружности $\Gamma(r) = \{z : |z| = r\}$ при $r \geq r_0$ можно указать множества $\Gamma_1(r)$ и $\Gamma_2(r)$, для которых справедливы:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & |e^{a_m z^m + \dots + a_1 z}| \geq k(r), \quad z \in \Gamma_1(r); \\ \text{II)} \quad & |e^{a_m z^m + \dots + a_1 z}| \leq \frac{1}{k(r)}, \quad z \in \Gamma_2(r); \\ \text{III)} \quad & \text{mes}[\Gamma(r) \setminus \{\Gamma_1(r) \cup \Gamma_2(r)\}] \leq M \frac{\ln k(r)}{r^m}, \quad M = \text{const} < \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство этой леммы буквально то же самое, что и доказательство леммы 3 работы (6).

Доказательство теоремы 1. 1. Пусть $\psi(r)$ и $k(r)$ монотонно возрастающие функции, стремящиеся к ∞ при $r \rightarrow \infty$, причем $\ln k(r) = o(r^m)$, $r \rightarrow \infty$. Учитывая лемму 2, обозначим через ($z = re^{i\varphi}$)

$$\Gamma_1(r) = \{z : |e^{P_m(z)}| \geq k(r)\}, \quad r \geq r_0,$$

$$\Gamma_2(r) = \left\{ z : |e^{P_m(z)}| \leq \frac{1}{k(r)} \right\}, \quad r \geq r_0,$$

$$E(r) = \Gamma(r) \setminus \{\Gamma_1(r) \cup \Gamma_2(r)\},$$

$$F_j(r) = \left\{ z : |z| = r, \quad |\arg z - \alpha_j| \leq \frac{1}{\psi(r)} \right\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Заметим, что

$$\text{mes} \left[F(r) = \bigcup_{j=1}^n F_j(r) \right] \leq \sum_{j=1}^n \text{mes}[F_j(r)] = \frac{2n}{\psi(r)}. \quad (6)$$

Величину $m(r; a; w)$ для $a \neq 0, \infty$ разобьем на части и каждую в отдельности оценим сверху

$$\begin{aligned} m(r; a; w) &= \frac{1}{2\pi} \int_{E(r) \cup F(r)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1(r) \setminus F(r)} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2(r) \setminus F(r)} \ln^+ \frac{1}{|w(re^{i\varphi}) - a|} d\varphi = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (7)$$

При $re^{i\varphi} \in \Gamma_1(r) \setminus F(r)$, применяя неравенства (2) и (3), получим, что

$$|w(re^{i\varphi})| = |(re^{i\varphi})^p e^{P_m(re^{i\varphi})} \Pi_1(re^{i\varphi}) \times \dots \times \Pi_n(re^{i\varphi})| \geq K_1 \frac{r^{p-n} k(r)}{\psi^n(r)},$$

$$r \geq r_1, \quad K_1 = \text{const} < +\infty,$$

а когда $re^{i\varphi} \in \Gamma_2(r) \setminus F(r)$

$$|w(re^{i\varphi})| \leq K_2 \frac{r^{p+n} \psi^n(r)}{k(r)}, \quad r \geq r_1, \quad K_2 = \text{const} < +\infty.$$

Предположим, что $k(r)$ и $\psi(r)$ выбраны таким образом, чтобы

$$\frac{r^{p-n} k(r)}{\psi^n(r)} \rightarrow \infty, \quad \frac{r^{p+n} \psi^n(r)}{k(r)} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

(например, при $p > 0$ $\psi(r) = r$, $k(r) = |r^{p+n}\psi^n(r)|^2 = r^{2(p+2n)}$). Отсюда будет следовать, что

$$I_2 + I_3 = O(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Воспользовавшись теоремой 7.3 ((³), с. 58), оценками (5) и (6) получим, что

$$I_1 \leq o(1)T(K_3 r; w), \quad K_3 = \text{const} > 1, \quad r \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Согласно лемме 1.3.1 работы (⁴), существует последовательность $r_n = r_n(K_3) \uparrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, для которой при $r_n \geq r_0$

$$T(K_3 r_n; w) \leq K_3^{\lambda+1} T(r_n; w), \quad (10)$$

где λ — нижний порядок функции $w(z)$.

Из (7), (8), (9) и (10) следует утверждение I.

II. Так как $\rho > m$, то $\rho(w) = \rho$, и поэтому для любого $\varepsilon > 0$ на некоторой последовательности значений $r_n \uparrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ справедливы

$$T(r_n; w) \geq r_n^{\rho-\varepsilon}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда, используя (4), будем иметь

$$\frac{m(r_n; w) + m\left(r_n; \frac{1}{w}\right)}{T(r_n; w)} \leq O(r_n^{m-\rho+\varepsilon}), \quad n \rightarrow \infty,$$

и поскольку ε может быть сколь угодно маленьким (в частности $0 < m < \rho - \varepsilon$), то получим, что $\delta(0; w) = \delta(\infty; w) = 0$.

III. Если $\rho < m$, то, $T(r; \Pi_1 \times \dots \times \Pi_n) = o(r^m)$, $r \rightarrow \infty$. Поэтому

$$T(r; w) = T(r; e^{\rho m}) + o(r^m), \quad r \rightarrow \infty$$

Следовательно, для достаточно малого ε ($0 < \rho + \varepsilon < m$)

$$\frac{N(r; \infty) + N(r; 0)}{T(r; w)} \leq O(r^{\rho+\varepsilon-m}), \quad r \rightarrow \infty.$$

Отсюда вытекает утверждение III.

Доказательство теоремы 2. Согласно условиям теоремы 2 функция $w(z)$ имеет вид

$$w(z) = \Pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{z}{a_k}}{1 - \frac{z}{b_k}},$$

где $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно нули и полюсы $w(z)$.

Докажем теорему в случае, когда $|b_1| < |a_1|$, ибо в противном случае она будет верна для функции $1/\Pi(z)$, а из этого будет следовать, что она верна и для функции $\Pi(z)$.

Обозначим через

$$\Pi_1(w) = \Pi(w e^{i\alpha}) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{w}{|a_k|}}{1 - \frac{w}{|b_k|}}.$$

Так как ((¹), с. 398, теорема 1) $\operatorname{Im} \Pi_1(w) \cdot \operatorname{Im} w > 0$ при $\operatorname{Im} w \neq 0$, то согласно теореме Чеботарева (см., например, ((¹), с. 400, теорема 2) функцию $\Pi_1(w)$ можно представить в виде

$$\Pi_1(w) = Cw + b + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left\{ \frac{1}{|b_k| - w} - \frac{1}{|b_k|} \right\},$$

где $C \geq 0$, b — вещественное, $A_k \geq 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} A_k / |b_k|^2 < +\infty$.

Таким образом

$$\Pi(z) = Ce^{-ia}z + b + z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k / |b_k|}{b_k - z}, \quad (11)$$

и, повторяя рассуждения теоремы Чеботарева, легко можно показать, что

$$\sum_{k=2}^{\infty} A_k / |b_k| < +\infty.$$

Рассмотрим случай, когда a не есть вещественное число. Из (11) будем иметь

$$\frac{\Pi(z) - a}{z} = Ce^{-ia} + \frac{b - a}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k / |b_k|}{b_k - z}.$$

Обозначим через

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k / |b_k|}{z - b_k} - \frac{b - a}{z}.$$

Так как $\sum_{k=1}^{\infty} A_k / |b_k| < +\infty$ и $\sum_{k=1}^{\infty} A_k / |b_k| \neq b - a$, то по теореме Келдыша ((²)), с. 377)

$$\delta(Ce^{-ia}; \varphi) = 0. \quad (12)$$

Поскольку

$$n(r; a; \Pi) = n(r; Ce^{-ia}; \varphi),$$

$$N(r; a; \Pi) = N(r; Ce^{-ia}; \varphi) + O(\ln r), \quad r \rightarrow \infty,$$

$$T(r; \Pi) = T(r; \varphi) + O(\ln r), \quad r \rightarrow \infty,$$

то из (12) следует, что $\delta(a; \Pi) = 0$

Пусть a — вещественно. Если $a = 0, \infty$, то, применяя (4), будем иметь

$$\delta(a; \Pi) = 0.$$

Возьмем $a \neq 0, \infty$. Образ каждого отрезка

$$\Gamma_k = \{z : \arg z = \alpha; |b_k| \leq |z| < |b_{k+1}|\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

при отображении функцией $\Pi(z)$, покрывает всю вещественную ось, т. е. Γ_k , $k = 1, 2, \dots$ содержит хотя бы одну a -точку (можно доказать, что ровно одну a -точку). Обозначим через $n(r)$ количество Γ_k , целиком лежащих в круге $\{z : |z| \leq r\}$. Тогда

$$n(r; \infty; \Pi) - 1 = n(r) \leq n(r; a; \Pi).$$

Из последнего неравенства и из того, что $\delta(\infty; \Pi) = 0$, получим, что $\delta(a; \Pi) = 0$.

В заключение автор приносит благодарность Г. А. Барсегяну за постановку задач и руководство.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ա. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ

Ֆունկցիաների դեֆեկտների մասին, որոնց գրոները և բեկոները պարզ են, իրար հաջորդում են և բնկած են հառագայթների համակարգի վրա

Դիցուք $I_j = \{z : \arg z = \alpha_j; -\pi < \alpha_j \leq \pi\}$, $j = 1, \dots, n$ գույզ առ գույզ իրարից տարբեր ճառագայթների համակարգ է:

Դիտարկենք C -ում վերջավոր կտրոշ ունեցող մերոմորֆ ֆունկցիաների $M(I_1, \dots, I_n)$ դասը՝ որի գրոները և բեկոները ընկած են $\bigcup_{j=1}^n I_j \cup \{z=0\}$ ընդ որում ամեն մի I_j , $j = 1, \dots, n$ վրա նրանք պարզ են և իրար հաջորդում են: $N(I_1, \dots, I_n)$ դասը նշանակենք $M(I)$ -ով $n=1$ դեպքում, որտեղ $I = \{z : \arg z = \alpha; -\pi < \alpha \leq \pi\}$: Տվյալ աշխատանքում ուսումնասիրվում են $M(I_1, \dots, I_n)$ դասի ֆունկցիաների դեֆեկտները:

Թեորեմ 1. Դիցուք $w(z) \in M(I_1, \dots, I_n)$ և ենթադրենք, որ (1)-ում $m \neq 0$. Այդ դեպքում հիշտ են հետևյալ պնդումները.

I) Ցանկացած $a \neq 0, \infty$ $\delta(a; w) = 0$:

II) Եթե $\rho(\Pi_1 \times \dots \times \Pi_n) = r > m$, ապա $\delta(0; w) = \delta(\infty; w) = 0$, որտեղ $\rho(f)$ -ը f ֆուկցիայի կարգն է:

III) Եթե $\rho > m$, ապա $\delta(0; w) = \delta(\infty; w) = 1$:

Թեորեմ 2. Դիցուք $w(z) \in M(I_1, \dots, I_n)$, $w(0) \neq 0, \infty$ և (1)-ում $m = 0$: Այդ դեպքում ցանկացած $a \in C$ $\delta(a; w) = 0$:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, М., 1956. ² М. В. Келдыш, ДАН СССР, т. 94, № 1, с. 377—380 (1954). ³ А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Распределение значений мероморфных функций. Наука, М., 1970. ⁴ В. И. Петренко, Рост мероморфных функций. Вища шк. 12, Харьков, 1978. ⁵ Г. А. Барсегян, Г. А. Сукиасян, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 24, № 3 (1989).