ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 88 1989 №2

УДК 519.1+519.71

МАТЕМАТИКА

Б. Е. Торосян

О числе $\{F\}$-отделимых подмножеств в конечных множествах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 22/XI 1988)

Рассматриваются непустые конечные множества точек n-мерного евклидова пространства R^n и вопросы оценки числа подмножеств рассматриваемого множества $A\subseteq R^n$, отделяемых в A заданным классом функций $\{F(x_1, \ldots, x_n)\}\equiv\{F(\tilde{x})\}\equiv\{F\}$.

В [1,2] было установлено необходимое и достаточное условие линейной отделимости ($\{\tilde{a}\tilde{x}+b\}$-отделимости) подмножества в конечном множестве. В [3] было дано обобщение этого условия до случая рассмотрения $\{F\}$-отделимости подмножества в конечном множестве, где $\{F\}$ — произвольный класс функций. Вытекаемые из этих условий выводы были использованы для установления верхних оценок числа $\{F\}$-отделимых подмножеств в конечных множествах — при различных конкретизациях описаний исходного конечного множества, отделяющего класса функций $\{F\}$, мощности и структуры подмножеств, подлежащих $\{F\}$-отделению.

Результаты по такой общности рассмотрений ранее не были получены. Что касается вопроса верхней оценки полного числа линейно-отделимых подмножеств, то непосредственно получаемые из результатов работ [1-3] оценки в общем случае хуже оценок, следующих из утверждения Р. Уайндера и др. (см. [4,5])).

Настоящая работа представляет результаты по верхним оценкам числа $\left\{\sum_{i=1}^{q} a_i f_i(\tilde{x})+b\right\}$-отделимых подмножеств в произвольном конечном множестве, обобщения некоторых результатов работ [1-3] и другие результаты такой же природы. Необходимая информация о неопределяемых здесь понятиях содержится в [3]. Отметим, что все определения [3] и настоящей работы, касающиеся множеств функций, носят специфический характер. Их следует понимать как „по разделению" или „относительно разделения".

1. Рассмотрим полный класс $\{G(\tilde{x}), I, J\}$.

Пусть I_0 обозначает множества всех представителей членов семейства I и пусть множество $A\subseteq E^n$ — произвольное.

Теорема 1. *Имеют место оценки*

1) $|M(\{G(\tilde{x}), I, J\}, E^n, p)| \leqslant \prod\limits_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_0} [\min\{p, 2^{n-k}\}+1]$;

2) $|M(\{G(\tilde{x})\ I, J\}, A)| \leqslant 2 \cdot \left\{ \frac{\left(\left|\frac{|A|}{2}\right|+1\right)^{|I_0|+1}-1}{|I_0|+1} + \left(\left|\frac{|A|}{2}\right|+1\right)^{|I_0|} \right\}.$

Через $M(\{F\}, E^n, A_{\text{ш.о}}(\tilde{\alpha}))$ обозначим множество всех $\{F\}$-отделимых шарообразных подмножеств в E^n с центрами в точке $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E^n$, а через $M(\{F\}, E^n, A_{\text{ш.о}}(\tilde{\alpha}, r_0))$ — множество всех таких подмножеств, имеющих радиус r_0. Множества всех подмножеств последнего типа, имеющие мощность $p = \sum_{l=0}^{r_0} \binom{n}{l} + q,\ 0 \leqslant q < \binom{n}{r_0+1}$, обозначим через $M(\{F\}, E^n, A_{\text{ш.о.}}(\tilde{\alpha}), p)$.

Теорема 2. *Справедливы неравенства*

$$1)\ |M(\{G(\tilde{x}), I, J\}, S^*(\tilde{\alpha}, r_0))| \leqslant \left[\sum_{l=0}^{r_0}\binom{n}{l}-1\right] \cdot$$

$$\cdot \prod_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_0}\left[\sum_{l=0}^{r_0+\sum_{t=1}^{k}\alpha_{i_t}-k}\binom{n-k}{l}+1\right]+2;$$

$$2)\ |M(\{G(\tilde{x}), I, J\}, E^n, A_{\text{ш.о.}}(\tilde{\alpha}, r_0))| \leqslant \left[\binom{n}{r_0+1}-1\right] \cdot$$

$$\cdot \prod_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_0}\left[\binom{n-k}{r_0+\sum_{t=1}^{k}\alpha_{i_t}-k+1}+1\right]+1;$$

$$3)\ |M(\{G(\tilde{x}), I, J\}, E^n, A_{\text{ш.о.}}(\tilde{\alpha}))| \leqslant \sum_{u=0}^{[n/2]-1}\left\{\left[\binom{n}{u+1}-1\right] \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \left[\prod_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_0}\left[\binom{n-k}{u+\sum_{t=1}^{k}\alpha_{i_t}-k+1}+1\right]+\prod_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_0}\left[\binom{n-k}{u-\sum_{t=1}^{k}\alpha_{i_t}+1}+1\right]\right]\right\}+n;$$

$$4)\ |M(\{G(\tilde{x}), I, J\}, E^n, A_{\text{ш.о.}}(\tilde{\alpha}), p| \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_0}\left[\min\left\{\binom{n-k}{r_0+\sum_{t=1}^{k}\alpha_{i_t}-k+1}, q\right\}+1\right].$$

2. Рассмотрим полный класс $\{F(\tilde{x})\} = \left\{\sum_{i=1}^{q} a_i \cdot f_i(\tilde{x}) + b\right\}$ — линейное замыкание заданного множества функций $\{f_1(\tilde{x}), \ldots, f_q(\tilde{x}), 1\}$.

Определение. Пусть классы $\{H(\tilde{x})\}$ и $\{S(\tilde{x})\}$ полны относительно множества $A \subseteq R^n$. Скажем, что $\{H(\tilde{x})\}$ и $\{S(\tilde{x})\}$ эквивалентны относительно A, если $M(\{H(\tilde{x})\}, A) = M(\{S(\tilde{x})\}, A)$. Скажем, что полные классы $\{H(\tilde{x})\}$ и $\{S(\tilde{x})\}$ эквивалентны, если они эквивалентны относительно любого множества $B \subset R^n$.

Пусть подкласс $\{F_{\text{п.}}(\tilde{x})\} \subseteq \{F(\tilde{x})\}$ состоит из всех функций

$F_{\text{ц.}}(\bar{x}) = \sum\limits_{t=1}^{q} a_t \cdot f_t(\bar{x}) + b$ с целыми значениями коэффициентов $a_1, \ldots, a_q$ и свободного члена b.

Теорема 3. *Классы $\{F(\bar{x})\}$ и $\{F_{\text{ц.}}(\bar{x})\}$ эквивалентны.*

Пусть функции $f_t(\bar{x})$, $t=\overline{1, q}$, определены в множестве $A \subseteq R^n$.

Теорема 4. *Если в A не существуют точки $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta} \in A$, $\bar{\alpha} \neq \bar{\beta}$, такие, что $f_t(\bar{\alpha}) = f_t(\bar{\beta})$ при $t=\overline{1, q}$, то для любого подмножества $A_0 \in M(\{F\}, A)$ существует отделяющая его функция $F_0(\bar{x}) \in \{F(\bar{x})\}$, принимающая различные значения в точках множества A.*

Отметим, что утверждение останется верным, если в его формулировке класс $\{F(\bar{x})\}$ заменить классом $\{F_{\text{ц.}}(\bar{x})\}$.

Через $s_t(A)$, $t \in \{\overline{1, q}\}$, обозначим количество различных значений, принимаемых функцией $f_t(\bar{x})$ в множестве A.

Теорема 5. *Имеет место оценка*

$$|M(\{F(\bar{x})\}, A, p)| \leqslant \prod_{t=1}^{q} \binom{p+s_t(A)-1}{s_t(A)-1}.$$

Пусть $m_t(A, p) = \max\limits_{\substack{A_0 \subseteq A \\ |A_0| = p}} \{\sum\limits_{\bar{x} \in A_0} f_t(\bar{x})\} - \min\limits_{\substack{A_0 \subseteq A \\ |A_0| = p}} \{\sum\limits_{\bar{x} \in A_0} f_t(\bar{x})\} + 1.$

Теорема 6. *Если функции $f_t(\bar{x})$, $t=\overline{1, q}$, целочисленны в множестве A, то имеет место неравенство*

$$|M(\{F(\bar{x})\}, A, p)| \leqslant \prod_{t=1}^{q} m_t(A, p)$$

3. Пусть множество $A \subseteq R^n$ и класс функций $\{F(\bar{x})\}$ произвольны. Пусть также $M^{+}_{\text{ст.}}(\{F\}, A) = \{A_0 \in 2^A / \exists F_0(\bar{x}) \in \{F(\bar{x})\} : F_0(\bar{x}) > 0$ при $\bar{x} \in A_0$ и $F_0(\bar{x}) < 0$ при $\bar{x} \in A \setminus A_0\}$. Множество $M^{-}_{\text{ст.}}(\{F\}, A)$ определяется аналогично.

Теорема 7. 1) $|M^{+}_{\text{ст.}}(\{F\}, A)| = |M^{-}_{\text{ст.}}(\{F\}, A)|$; 2) *Множество $M^{+}_{\text{ст.}}(\{F\}, A) \cap M^{-}_{\text{ст.}}(\{F\}, A)$ состоит из некоторого количества пар взаимно-дополняющих (до A) подмножеств;* 3) *Если класс $\{F\}$ полон относительно A, то $M^{+}_{\text{ст.}}(\{F\}, A) \equiv M^{-}_{\text{ст.}}(\{F\}, A) \equiv M(\{F\}, A)$.*

Теоорема 8. $A_0 \in M^{\sigma}(\{F\}, A)$, $\sigma \in \{+, -\}$, *тогда и только тогда, когда в классе $\{F(\bar{x})\}$ разрешима система*

$$\begin{cases} \sum\limits_{\bar{x} \in A_0} F(\bar{x}) - \sum\limits_{\bar{x} \in A \setminus A_0} F(\bar{x}) = \sigma \sum\limits_{\bar{x} \in A} |F(\bar{x})| \\ F(\bar{x}) \neq 0, \text{ при } \bar{x} \in A. \end{cases}$$

Из теорем 7 и 8 следуют выводы, которые можно использовать в вопросах оценки числа строго $\{F\}$-отделимых подмножеств конечных множеств (аналогично рассмотрениям полных классов функций).

4. Пусть $\bar{u}(\bar{x}) = (u_1(\bar{x}), \ldots, u_n(\bar{x}))$—преобразование координат. Скажем, что класс $\{F(\bar{x})\}$ замкнут относительно подстановки $\bar{u}(\bar{x})$ если для любой функции $F \in \{F\}$ имеет место $F(u_1(\bar{x}), \ldots, u_n(\bar{x})) \in \{F\}$.

Если преобразованием $\tilde{u}(\tilde{x})$ множество $A\subseteq R^n$ отображается на множество $B\subseteq R^n$, то запишем $A\xrightarrow{\tilde{u}(\tilde{x})}B$.

Теорема 9. *Пусть:* 1) *для множеств* $A, B\subseteq R^n$ *имеем* $A\xrightarrow{\tilde{u}(\tilde{x})}B$ $B\xrightarrow{\tilde{v}(\tilde{x})}A$; 2) *класс* $\{F\}$ *замкнут относительно подстановки каждого из преобразований* $\tilde{u}$ $(\tilde{x})$ *и* $\tilde{v}(\tilde{x})$. *Тогда для любого* $p\in\{\overline{0, |A|}\}$ *имеет место равенство* $|M_{\text{сл}}(\{F\}, A, p)| = |M_{\text{сл}}(\{F\}, B, p)|$.

Приведем одно следствие из этого простого утверждения.

Следствие. *Пусть класс* $\{G(\tilde{x}), I, J\}$ *замкнут относительно подстановки линейных преобразований вида* $u(x) = (a_1x_1+b_1, \ldots, a_nx_n+b_n)$ *и пусть для множеств* $A=S_1^{(1)}\times\ldots\times S_n^{(1)}$, $B=S_1^{(2)}\times\ldots\times S_n^{(2)}$ *выполняются условия:* 1) $|S_i^{(1)}|=|S_i^{(2)}|$ *при* $i=\overline{1, n}$; 2) *для любого* $i\in\{\overline{1, n}\}$ *каждое из множеств* $S_i^{(1)}$ *и* $S_i^{(2)}$ *состоит из последовательных членов некоторой арифметической прогрессии. Тогда для любого* $p\in\{\overline{0, |A|}\}$ *имеет место равенство* $|M(\{G(\tilde{x}), I, J\}, A, p)| = |M(\{G(\tilde{x}), I, J\}, B, p)|$.

Замечание. В силу равенств $|M_{\text{сл}}(\{F\}, A, p)| = |M(\{F\}, A, |A|-p|$ и $|M^-_{\text{ст}}(\{F\}, A, p)| = |M^-_{\text{ст}}(\{F\}, A, |A|-p)|$ оценки числа $\{F\}$-отделимых в A подмножеств мощности p достаточно рассматривать в пределах $0\leqslant p\leqslant |A|/2$.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Բ. Ե. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

Վերջավոր բազմությունների $\{F\}$-անջատելի ենթաբազմությունների քանակի մասին

Աշխատանքում հաստատվում են վերջավոր բազմությունների {F}*-անջատելի ենթաբազմությունների քանակների տարբեր վերին գնահատականներ՝ կախված ելակետային բազմության, ենթաբազմություններն անջատող ֆունկցիաների* {F} *դասի, ինչպես նաև* {F}*-անջատման ենթակա ենթաբազմությունների հզորության և կառուցվածքի նկարագրություններից։*

Այստեղ ներկայացվում են կամայական վերջավոր բազմության $\left\{\sum_{i=1}^{q} a_i f_i(\tilde{x})+b\right\}$*-անջատելի ենթաբազմությունների քանակների վերին գնահատականներ,* ([1-3]) *աշխատանքների որոշ արդյունքների ընդհանրացումներ և այդ բնույթի այլ արդյունքներ։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. Е. Торосян,* VI Всесоюзн. конф. по проблемам теоретич. кибернетики. Тезисы докл., г. Саратов, 1983. [2] *Б. Е. Торосян,* ДАН АрмССР, т. 84, № 2 (1987). [3] *Б. Е. Торосян.* ДАН АрмССР, т. 87, № 4 (1988). [4] *R. O. Winder,* Trans. IEEE, EC—12, № 5 (1963). [5] *М. Блох, Я. Моравек,* Кибер. сб., н. с., № 6, 1969.