ՀԱՅԿԱԿԱՆ ԽՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Том 88 1989 №2

УДК 517.547

МАТЕМАТИКА

В. М. Мартиросян

Об операторах, подобных оператору Гильберта: теоремы расщепления

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/XI 1988)

Теорема Рисса—Титчмарша ([1]) об ограниченности в $L_p(R)$, $1<p<\infty$, оператора Гильберта

$$(Sf)(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|y-x|\geq\varepsilon}\frac{f(y)}{y-x}dy,\quad x\in R\quad \text{п. в.},\tag{1}$$

и результаты И. И. Привалова ([2]) о граничном поведении интегралов типа Коши—Стильтьеса устанавливают обозримую связь разложения $L_p(R)=H_p^+\oplus H_p^-$ с формулами Сохоцкого. Если $f(x)(1+|x|)^{-1}\in L_1(R)$ и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_R\frac{f(x)}{x-z}dx=\begin{cases}f^+(z), & \operatorname{Im}z>0,\\ -f^-(z), & \operatorname{Im}z<0,\end{cases}\tag{2}$$

то формулы Сохоцкого можно записать в виде

$$(P^\pm f)(x)=f^\pm(x),\ x\in R\quad \text{п. в.};\quad P^\pm=\frac{1}{2}(I\pm S),\tag{3}$$

где I—единичный оператор. Тогда $P^\pm$—соответственно операторы ограниченного проектирования $L_p(R)$ на $H_p^\pm$ (см., например, ([3])) Известна (см., например, ([3])) следующая

Проблема А. *Пусть $1<p<\infty$ и $w>0$—локально суммируемая на R функция. Когда оператор Гильберта S ограничен в $L_p(R;\,wdx)$?*

Полное решение проблемы А дано в следующей теореме Ханта—Макенхаупта—Видена ([4]).

Теорема А. *Пусть $1<p<\infty$ и $w>0$—локально суммируемая на R функция. Тогда для справедливости оценки*

$$\int\limits_R|Sf|^p w\,dx\leq C_p\int\limits_R|f|^p w\,dx\tag{4}$$

с константой C_p, не зависящей от f, необходимо и достаточно, чтобы $w\in(A_2)$, т. е.

$$\sup_J\left\{|J|^{-p}\left(\int\limits_J w\,dx\right)\left(\int\limits_J w^{\frac{1}{1-p}}dx\right)\right\}<+\infty,$$

где $J\subset R$—произвольный интервал, $|J|$ — его длина.

Проблема А требует уточнения для пространств $L_p(\boldsymbol{R}; v dx)$, не лежащих в $L_1(\boldsymbol{R}; (1+|x|)^{-1}dx)$, так как выражение Sf имеет смысл не для всех $f\in L_p(\boldsymbol{R}; vdx)$. В этом случае от оператора S можно перейти к подобному ему оператору $S_\Omega=\Omega S\Omega^{-1}$, выбрав функцию Ω так, чтобы оператор S_Ω мог быть применим ко всем $f\in L_p(\boldsymbol{R}; vdx)$. Положим

$$P_\Omega^+=\Omega P^+\Omega^{-1},\ P_\Omega^-=\overline{\Omega}P^-\overline{\Omega}^{-1},\ P_\Omega=I-P_\Omega^+-P_\Omega^-. \tag{5}$$

Задача 1. *Пусть $1<p<\infty$, Ω — измеримая на $\boldsymbol{R}$, почти всюду отличная от нуля функция, и для функции $v\geqslant 0$ произведение $w=v|\Omega|^p$ локально суммируемо на $\boldsymbol{R}$. Найти условия, при которых справедлива оценка*

$$\int_{\boldsymbol{R}}|S_\Omega f|^p v dx\leqslant C_p\int_{\boldsymbol{R}}|f|^p v dx \tag{6}$$

с константой C_p, не зависящей от f, и

$$(P_\Omega^- P_\Omega^+)(f)=0,\quad f\in L_p(\boldsymbol{R}; vdx). \tag{7}$$

При $\Omega(z)\equiv 1$ задача 1 сводится к проблеме А, так как в этом случае $S_\Omega=S$, $P_\Omega^\pm=P^\pm$ и (7) вытекает из (6). Однако из (6), вообще говоря, не следует (7).

Решение поставленной задачи дано в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $1<p<\infty$, Ω — измеримая на $\boldsymbol{R}$ почти всюду отличная от нуля функция и для функции $v\geqslant 0$ произведение $w=v|\Omega|^p$ локально суммируемо на $\boldsymbol{R}$. Тогда для выполнения* (6) *и* (7) *необходимо и достаточно, чтобы $w\in(A_p)$ и $\exp\{2i\arg\Omega(x)\}$ была граничной функцией внутренней функции для полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.*

Следствие 1. *Пусть $1<p<\infty$, $\Omega\neq 0$ — целая функция и для функции $v\geqslant 0$ произведение $w=v|\Omega|^p$ локально суммируемо на $\boldsymbol{R}$. Тогда для выполнения* (6) *и* (7) *необходимо и достаточно, чтобы $w\in(A_p)$ и*

$$|\Omega(z)/\overline{\Omega}(z)|\leqslant 1,\quad \operatorname{Im} z>0. \tag{8}$$

Отметим, что класс HB целых функций, удовлетворяющих условию (8) и не имеющих корней при $\operatorname{Im} z\leqslant 0$, был изучен М. Г. Крейном ([5]).

Через $\overline{HB}_0$ обозначим класс целых функций Ω, удовлетворяющих (8) и условию

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\ y^{-1}\ln|\Omega(iy)/\overline{\Omega}(iy)|=0. \tag{9}$$

С задачей 1 и теоремой 1 связаны теоремы расщепления трех типов весовых пространств в прямую сумму „стандартных" пространств. Для формулировки соответствующих результатов приведем необходимые сведения и обозначения.

Пусть $1<p<\infty$, $w\in(A_p)$. Если $f(z)$ голоморфна при $\operatorname{Im} z>0$, то

$$f\in H_p^+(wdx)\Leftrightarrow\sup_{y>0}\left\{\int_{\boldsymbol{R}}|f(x+iy)|^p w(x)dx\right\}<+\infty \tag{10}$$

(см. ([6])). Аналогично определяется пространство $H^-_p(wdx)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z<0$. Функции из $H^{\pm}_p(wdx)$ имеют некасательные граничные значения п. в. на R и с нормой

$$\|f\|_{p,w}=\left(\int\limits_R |f|^p w dx\right)^{1/p} \tag{11}$$

$H^{\pm}_p(wdx)$ и $H^-_p(wdx)$—банаховы пространства ([6]).

Если $1<p<\infty$, $w\in(A_p)$, $0\leqslant\sigma<\infty$, то $W^{\pm}_{p,\sigma}(wdx)$—пространство с нормой (11) целых функций $f(z)$ степени $\leqslant\sigma$, принадлежащих $H^{\pm}_p(wdx)$ при $\pm\operatorname{Im} z>0$ (см. ([7-9])). $W^+_{p,\sigma}(wdx)$ и $W^-_{p,\sigma}(wdx)$ – банаховы пространства ([7-9]), а $W^{\pm}_{p,0}(wdx)$ содержит лишь тождественно нулевую функцию.

Введем пространство $E_p(vdx)$. Если

$$1<p<\infty,\ w\in(A_p),\ \Omega\in\overline{HB}_0,\ v=w|\Omega|^{-p}, \tag{12}$$

то $E_p(vdx)$—пространство с нормой

$$\|f\|_{p,v}=\left(\int\limits_R |f|^p v dx\right)^{1/p} \tag{13}$$

целых функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям

$$f(z)/\overline{\Omega}(z)\in H^+_p(wdx),\ f(z)/\Omega(z)\in H^-_p(wdx). \tag{14}$$

$E_p(vdx)$—банахово пространство, причем: 1) если $\Omega(z)/\overline{\Omega}(z)\neq 0$ при $\operatorname{Im} z>0$, то $E_p(vdx)$ содержит лишь тождественно нулевую функцию; 2) если функция $\Omega(z)/\overline{\Omega}(z)$ имеет в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ ровно n нулей (с учетом кратностей), где $n\in N\cup\{\infty\}$, то $E_p(vdx)$—n-мерное пространство.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (12). *Тогда*

$$L_p(R;\ vdx)=E_p(vdx)\oplus\Omega H^+_p(wdx)\oplus\overline{\Omega}H^-_p(wdx), \tag{15}$$

а P_Ω, P^+_Ω, P^-_Ω—соответственно операторы ограниченного проектирования банахова пространства $L_p(R;\ vdx)$ на его замкнутые подпространства

$$E_p(vdx),\ \Omega H^+_p(wdx),\ \overline{\Omega}H^-_p(wdx). \tag{16}$$

В специальном случае, когда $p=2$, $w(x)=1$ и функция $\Omega(z)$ имеет конечную степень, теорема 2 эквивалентна одному утверждению из работы ([10]).

Если выполнены условия (12) и $0\leqslant\sigma<\infty$, то через $H^+_{p,\sigma}(vdx)$ обозначим пространство с нормой (13) функций $f(z)$, голоморфных при $\operatorname{Im} z>0$ и таких, что

$$e^{i\sigma z}f(z)\{\overline{\Omega}(z)\}^{-1}\in H^+_p(wdx). \tag{17}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (12) *и* $0\leqslant\sigma<\infty$. *Тогда*

$$H^+_{p,\sigma}(vdx)=E_p(vdx)\oplus\Omega H^+_p(wdx)\oplus\overline{\Omega}\,W^-_{p,\sigma}(wdx), \tag{18}$$

а P_Ω, P^+_Ω, P^-_Ω—соответственно операторы ограниченного проекти-

рования банахова пространства $H^+_{p,\sigma}(vdx)$ на его замкнутые подпространства

$$E_p(vdx),\ \Omega H^+_p(wdx),\ \overline{\Omega}\, W^-_{p,\sigma}(wdx). \tag{19}$$

Если выполнены условия (12) и $0\leqslant\sigma_+,\ \sigma_-<\infty$, то через $E_p^{\sigma_+,\sigma_-}(vdx)$ обозначим пространство с нормой (13) целых функций $f(z)$, для которых

$$e^{i\sigma_+ z}\frac{f(z)}{\overline{\Omega}(z)}\in H^+_p(wdx),\quad e^{-i\sigma_- z}\frac{f(z)}{\Omega(z)}\in H^-_p(wdx). \tag{20}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (12) *и* $0\leqslant\sigma_+,\ \sigma_-<\infty$. *Тогда*

$$E_p^{\sigma_+,\sigma_-}(vdx)=E_p(vdx)\oplus\Omega\, W^+_{p,\sigma_-}(wdx)\oplus\overline{\Omega}\, W^-_{p,\sigma_+}(wdx), \tag{21}$$

а P_{Ω}, P^+_{Ω}, P^-_{Ω} *— соответственно операторы ограниченного проектирования банахова пространства* $E_p^{\sigma_+,\sigma_-}(vdx)$ *на его замкнутые подпространства*

$$E_p(vdx),\ \Omega\, W^+_{p,\sigma_-}(wdx),\ \overline{\Omega}\, W^-_{p,\sigma_+}(wdx) \tag{22}$$

При $p=2$, $w(x)\equiv 1$ в (15), (18) и (21) имеем расщепление в сумму ортогональных пространств.

Отметим, что теоремы 2—4 обобщаются на тот случай, когда $1<p<\infty$, $w\in(A_p)$, $v=w|\Omega|^{-p}$, где Ω—измеримая на R почти всюду отличная от нуля функция и $\exp\{2i\arg\Omega(x)\}$—граничная функция внутренней функции для полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Հիլբերտի օպերատորին նման օպերատորների մասին. վերլուծության թեորեմներ

Դիցուք $1<p<\infty$ *և* $w\geqslant 0$ *իրական առանցքի վրա լոկալ հանրագումարելի ֆունկցիա է։* $L_p(R;\ wdx)$ *դասում Հիլբերտի ձևափոխության սահմանափակ լինելու հայտանիշը տրվել է* (1) *աշխատանքում։ Ներկա հոդվածում բերված է մեկ ավելի ընդհանուր խնդրի լուծումը։ Կշռային* v *ֆունկցիաների մի դասի համար բերված է մի թեորեմ* $L_p(R;\ vdx)$ *տարածության իր որոշակի տեսքի փակ ենթատարածությունների ուղիղ գումարի տեսքով ներկայացնելու մասին։ Բերված են նման տիպի թեորեմներ* $L_p(R;\ vdx)$*-ի երկու տեսակի ենթատարածությունների վերաբերյալ։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Е. Титчмарш.* Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948. [2] *И. И. Привалов*, Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 4, с. 261—276 (1940). [3] *Дж. Гарнетт*, Ограниченные аналитические функции, Мир, М., 1984. [4] *R. Hunt, B. Muckenoupt, R. L. Weeden*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 176, p. 227—251 (1973). [5] *Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн*, О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, 1938. [6] *J. Garsia-Cuerva*, Rozp. Math., v. 162, p. 5—68 (1979). [7] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. [8] *В. М. Мартиросян*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 19, с. 44—74 (1984). [9] *В. Б. Дыбин*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 21, с. 566—582 (1986). [10] *В. П. Гурарий*, Мат. сб., т. 58 (100), с. 439—452 (1962).