

УДК 539.3

МЕХАНИКА

А. Д. Дроздов

Метод Гиббса в теории отдира упругих тел

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 30/X 1988)

Исследуется задача об отдире двух упругих тел, соединенных тонким клеевым слоем. Сформулирован принцип Гиббса для определения области, в которой происходит разрыв соединительного слоя. Получено соотношение, связывающее размеры области отдира с интенсивностью внешней нагрузки.

1. *Постановка задачи.* Два упругих тела, занимающие области Ω_1 и Ω_2 , соединены тонким клеевым слоем постоянной толщины h вдоль участка границы $\gamma(0)$. Тела помещены в термостат и находятся в естественном состоянии при температуре θ_* . Введем в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ лагранжеву систему координат $\xi = (\xi_i)$. В момент времени $t=0$ к телам прикладываются массовые силы $F(t, \xi)$ и поверхностные усилия $f(t, \xi)$ вдоль участка границы $\Gamma = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \gamma(0)$. Под действием нагрузки происходит деформация тел и частичный разрыв клеевого слоя. Обозначим через $\gamma(t)$ участок границы, вдоль которого тела соединены в момент времени $t \in [0, T]$. Будем исследовать задачу об отдире в квазистатическом приближении при малых деформациях. Обозначим: $u(t, \xi)$ — вектор перемещения, $\varepsilon(t, \xi)$ — тензор деформаций при переходе из недеформированной в актуальную конфигурацию, ε_i , e — шаровая составляющая и девiator тензора ε . Удельные внутренняя энергия Φ и энтропия S упругого тела определяются по формулам

$$\rho\Phi = \rho\Phi_* + \frac{1}{2} K \bar{\varepsilon}^2 + G e \cdot e + \rho c (\theta^2 - \theta_*^2) / (2\theta_*), \quad \rho S = \rho S_* + \rho c (\theta - \theta_*) / \theta_*. \quad (1.1)$$

Здесь Φ_* и S_* — удельные внутренняя энергия и энтропия в естественном состоянии при температуре θ_* , ρ — плотность, c — теплоемкость, θ — температура, K и G — модули объемной деформации и сдвига.

Клеевой слой рассматривается как поверхность бесконечно малой толщины, которая обладает сосредоточенной внутренней энергией и энтропией. Деформацией этой поверхности пренебрегаем. Удельные внутренняя энергия Φ_c и энтропия S_c равны

$$\rho_c \Phi_c = \rho_c \Phi_{c*} + \rho_c c_c (\theta^2 - \theta_*^2) / (2\theta_*), \quad \rho_c S_c = \rho_c S_{c*} + \rho_c c_c (\theta - \theta_*) / \theta_*. \quad (1.2)$$

Здесь Φ_{c*} и S_{c*} — удельные внутренняя энергия и энтропия в естественном состоянии при температуре θ_* , ρ_c — плотность, c_c — теплоемкость клея.

Требуется по заданным усилиям F, f определить напряженно-деформированное состояние в телах и расположение соединительного слоя $\gamma(t)$. Задача об отдире стержней и лент рассматривалась в ряде работ (см., например, (1,2), где содержится подробная библиография).

2. *Принцип Гиббса.* Представим процесс непрерывного деформирования как предел следующего дискретного процесса. Разобьем отрезок времени $[0, T]$ точками $t_k = k\Delta, \Delta = T/N, k = 1, \dots, N$. При дискретном нагружении на интервале времени $[t_{k-1}, t_k)$ под действием усилий $F_{k-1} = F(t_{k-1}, \xi), f_{k-1} = f(t_{k-1}, \xi)$ система находится в положении термодинамического равновесия, которое характеризуется постоянной температурой θ_{k-1} , полем перемещений $u_{k-1}(\xi)$ и соединительным слоем, расположенным вдоль участка границы γ_{k-1} . В момент времени t_k к телам прикладывается нагрузка F_k, f_k . Система мгновенно переходит в новое состояние термодинамического равновесия, которое характеризуется параметрами θ_k, u_k, γ_k . Переход из предыдущего в последующее равновесное состояние подчиняется первому закону термодинамики (3)

$$\bar{\Phi}_k - \bar{\Phi}_{k-1} = \bar{A}_k, \quad \bar{A}_k = \int_{\Omega} \rho F_k \cdot (u_k - u_{k-1}) dv + \int_{\Gamma} f_k \cdot (u_k - u_{k-1}) ds \quad (2.1)$$

Здесь $\bar{\Phi}_k$ — внутренняя энергия системы, dv — элемент объема области Ω , ds — элемент площади поверхности $\partial\Omega$.

Из соотношений (1.1), (1.2) и (2.1) найдем температуру θ_k и энтропию системы $\bar{S}_k$ (v — объем области Ω , a_k — площадь поверхности γ_k):

$$\theta_k = \theta_{k-1} \left\{ 1 + 2\theta_* (\rho c v + \rho_c c_c a_k)^{-1} \theta_{k-1}^{-2} [\bar{A}_k - (W_k - W_{k-1}) - \rho_c (\Phi_{c_k} + c_c (\theta_{k-1}^2 - \theta_*^2) / (2\theta_*)) (a_k - a_{k-1})] \right\}^{1/2}, \quad W_k = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} K \varepsilon_k^2 + G e_k \dots e_k \right) dv, \quad (2.2)$$

$$\bar{S}_k = \rho (S_* - c) v + \rho_c (S_{c_*} - c_c) a_k + (\rho c v + \rho_c c_c a_k) \theta_k / \theta_*.$$

Согласно принципу Гиббса (4,5) истинное положение термодинамического равновесия u_k, γ_k доставляет $\max_{\gamma_k} \max_{u_k} \bar{S}_k$. Можно показать (6), что при фиксированном γ_k величина $\max_{u_k} \bar{S}_k$ достигается на поле перемещений u_k , которое в области Ω удовлетворяет уравнениям равновесия, а на поверхности $\partial\Omega$ — граничным условиям в напряжениях. Справедливо равенство (5):

$$W_k = \frac{1}{2} A_k, \quad A_k = \int_{\Omega} \rho F_k \cdot u_k dv + \int_{\Gamma} f_k \cdot u_k ds. \quad (2.3)$$

Предположим, что расположение соединительного слоя известно, а его площадь a_k подлежит определению. Приравняв нулю производную $\bar{S}_k$ по a_k , найдем с помощью (2.3)

$$\rho_c \left(S_{c_*} + c_c \frac{\theta_k - \theta_*}{\theta_*} \right) \theta_k = \rho_c \left(\Phi_{c_*} + c_c \frac{\theta_k^2 - \theta_*^2}{2\theta_*} \right) -$$

$$-\frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \rho F_k \cdot \frac{\partial u_k}{\partial a_k} dv + \int_{\Gamma} f_k \cdot \frac{\partial u_k}{\partial a_k} ds \right). \quad (2.4)$$

Соотношения (2.2), (2.4) определяют размеры клеевого слоя в дискретной задаче отрыва. Переходя в этих равенствах к пределу при $\Delta \rightarrow 0$ и учитывая (2.3), получим дифференциальные уравнения для определения площади соединительного слоя при непрерывном нагружении (точкой обозначена производная по времени t):

$$(\rho c v + \rho_c c_c a) \dot{\theta} = \frac{1}{2} \left| \int_{\Omega} \rho (F \cdot u - F^0 \cdot u) dv + \int_{\Gamma} f \cdot u - f^0 \cdot u) ds \right| - \\ - \left[\rho_c \left(\Phi_{c_*} + c_c \frac{\theta^2 - \theta_*^2}{2\theta_*} \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \rho F \cdot \frac{\partial u}{\partial a} dv + \int_{\Gamma} f \cdot \frac{\partial u}{\partial a} ds \right) \right] a, \quad (2.5)$$

$$\rho_c \left(S_{c_*} + c_c \frac{\theta - \theta_*}{\theta_*} \right) \theta = \rho_c \left(\Phi_{c_*} + c_c \frac{\theta^2 - \theta_*^2}{2\theta_*} \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \rho F \cdot \frac{\partial u}{\partial a} dv + \int_{\Gamma} f \cdot \frac{\partial u}{\partial a} ds \right). \quad (2.6)$$

Для приложений наибольший интерес представляет однопараметрическое нагружение: $F = R(t)F^0(\xi)$, $f = R(t)f^0(\xi)$, где F^0 , f^0 — заданные функции. Обозначим через $u^0(\xi, a)$ поле перемещений, соответствующее внешней нагрузке F^0 , f^0 и площади соединительного слоя a . В силу линейности уравнений равновесия $u = R(t)u^0$. Из (2.5) (2.6) получим $\gamma_1(x + \gamma_1)^{-1} = -\theta \cdot [\theta + (x_1 - 1)\theta_*]^{-1}$, где $\gamma_1 = a/a(0)$, $x = \rho c v / (\rho_c c_c a(0))$, $x_1 = S_{c_*}/c_c$. Интегрируя это равенство, найдем $\theta = \theta_* [1 + x_1(1 - \gamma_1)(x + \gamma_1)^{-1}]$. Подставим выражение для θ (2.6) ($\Psi_{c_*} = \Phi_{c_*} - S_{c_*}\theta_*$ — удельная свободная энергия клея):

$$\frac{\rho_c S_{c_*}^2 \theta_*}{c_c} \left[\left(\frac{x + 1}{x + \gamma_1} \right)^2 - 1 \right] = 2\rho_c \Psi_{c_*} - R^2 \left(\int_{\Omega} \rho F^0 \cdot \frac{\partial u^0}{\partial a} dv + \int_{\Gamma} f^0 \cdot \frac{\partial u^0}{\partial a} ds \right). \quad (2.7)$$

Соотношение (2.7) представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение для определения безразмерной площади соединительного слоя γ_1 при заданном внешнем усилии K .

3. Пример. Рассмотрим два прямолинейных стержня длины l прямоугольного поперечного сечения ширины d и толщины h . Один конец стержней жестко зашкреплен, а другой свободен. Стержни соединены между собой клеевым слоем вдоль участка длиной $b(0) < l$, примыкающего к зашкрепленным концам. К свободным концам стержней приложены силы $R = R(t)$, направленные перпендикулярно продольной оси. Под действием нагрузки происходит плоский изгиб стержней и частичный разрыв клеевого слоя. Считаем, что прогиб стержней достаточно мал и справедлива гипотеза плоских сечений. Напряжение связано с деформацией в законе Гука с модулем упругости E .

Согласно (2.7) безразмерная координата конца области разрыва $\gamma_1 = b/b(0)$ определяется из соотношения

$$\left(\frac{x + 1}{x + \gamma_1} \right)^2 - 1 = A [R_*^2 (l_* - \gamma_1)^2 - B]. \quad (3.1)$$

Здесь $R_* = R/(Ehd)$, $l_* = l/b(0)$, $A = 24c_c E b^2(0) (\rho_c h S_c^2 \eta_*)$, $B = -\rho_c h \Psi_{c_*} / (12 E b^2(0))$ — безразмерные параметры. Назовем систему устойчивой, если достаточно малые внешние воздействия не приводят к разрыву соединительного слоя. В силу (3.1) система является устойчивой при $\Psi_{c_*} < 0$.

4. *Задача Гриффитса*. Две других полуплоскости, занимающие области $x_2 < 0$ и $x_2 > 0$, соединены между собой тонким клеевым слоем вдоль оси x_1 на интервалах $(-\infty, -b(0)]$ и $[b(0), \infty)$ ((x_1, x_2) — декартовы координаты). На бесконечности к системе приложены растягивающие усилия интенсивностью $q = q(t)$, направленные перпендикулярно оси x_1 . Под действием нагрузки происходит деформация системы и частичный разрыв клеевого слоя. Рассматриваемый пример является модификацией задачи Гриффитса о распространении трещины при плоской деформации (¹). Пусть в момент времени t трещина располагается на отрезке $[-b(t), b(t)]$ оси x_1 . Величина b определяется из соотношений (2.3), (2.7) при $\kappa = \infty$:

$$\frac{\partial W_*}{\partial b} + 2\rho_c \Psi_{c_*} = 0. \quad (4.1)$$

Здесь $W_* = \pi q^2 b^2 (1 - \nu) / (2G)$ — механическая энергия системы, вызванная наличием трещины, ν — коэффициент Пуассона. Соотношение (4.1) совпадает с энергетическим критерием разрушения (¹), в котором следует положить $\beta = -\frac{1}{2} \rho_c \Psi_{c_*}$, где β — удельная энергия образования новой граничной поверхности.

Московский автомеханический
институт

Ա. Դ. ԳՐԻՖԻՏ

Առաձգական մարմինների իրարից անջատման տեսության
մեջ Գրիֆսի մեթոդը

Ուսումնասիրվում է բարակ սոսնձային շերտով միացված երկու առաձգական մարմինների իրարից անջատման մասին խնդիրը: Ձևակերպվել է Գրիֆսի սկզբունքը այն տիրույթի որոշման համար, որի մեջ տեղի ունի միացվող շերտի ճեղքում: Ատացված է հարաբերակցություն, որով կապված են ճեղքվածքի տեղամասի և արտաքին թևի ուժգնության չափերը:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Р. В. Гольдштейн, И. Н. Дашевский, В. М. Ентое, Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, № 2, с. 110—116 (1979). ² K. S. Kim, N. Aravas, Int. J. Solids Structures, v. 24, № 4, p. 417—435. (1988). ³ Л. И. Седов, Механика сплошной среды. Т. 1. Наука, М., 1976. Т. 2. Наука, М., 1976. ⁴ Дж. Гиббс, Термодинамические работы. Гостехтеориздат, М.—Л., 1951. ⁵ В. Л. Бердичевский, Вариационные принципы механики сплошной среды. Наука, М., 1983. ⁶ Н. Х. Арутюнян, А. Д. Дроздов, В. Э. Паулов, Механика растущих вязкоупругопластических тел. Наука, М., 1987. ⁷ Разрушение. Ред. Либовиц Г. Т. 2. Математические основы теории разрушения, Мир, М., 1975.