ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 88 1989 № 1

УДК 517.518.5

МАТЕМАТИКА

В. М. Мартиросян

Преобразования Фурье в $L_2(\mathbf{R})$ с весом

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/XI 1988)

На основе построенной Planшерелем [1] теории Фурье-трансформации в $L_2(\mathbf{R})$ Винер и Пэли [2] установили теоремы параметрического представления пространств H_2^+ и $W_{2,\sigma}(dx)$. Бохнер [3], Н. И. Ахиезер [4] и В. П. Гурарий [5] обобщили теоремы Планшереля и Винера—Пэли на пространства $L_2(\mathbf{R}; \varphi^{-1}dx)$ и их подпространства $W_{2,\sigma}(\varphi^{-1}dx)$ целых функций конечной степени $\leqslant\sigma$ $(0<\sigma<\infty)$, где φ — положительная на $\mathbf{R}$ целая функция класса A* и *конечной степени*. При этом в [5] дано обоснование утверждения: „Для справедливости разложения функций $f\in L_2(\mathbf{R}; \varphi^{-1}dx)$ в интеграл Фурье—Планшереля дальнейшее ослабление условий на φ невозможно", которое на самом деле устанавливает границы возможностей предложенных в работах [3-5] методов, использующих специфические свойства целых функций конечной степени.

М. М. Джрбашян [6,7] построил теорию гармонического анализа на произвольной конечной системе лучей, исходящих из точки $z=0$ комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Основой для этого послужили замечательные асимптотические свойства целой функции типа Миттаг—Леффлера порядка $\rho\geqslant 1/2$ и типа $\sigma=1$:

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n/\Gamma(\mu+n\rho^{-1}).$$

В этой теории содержатся далеко идущие обобщения теоремы Планшереля. Семейство теорем типа Винера—Пэли для пространств целых функций произвольного конечного порядка $\rho\geqslant 1/2$ и нормального типа впервые открыто в исследованиях М. М. Джрбашяна [6,7]. В его работе [8], совместной с А. Е. Аветисяном, установлены теоремы параметрического представления пространств типа H_2^+ функций, голоморфных в угловых областях плоскости $\mathbf{C}$.

В данной заметке установлена справедливость разложения функций $f\in L_2(\mathbf{R}; F^{-1}dx)$ в интеграл Фурье—Планшереля для произвольной целой функции F, положительной на $\mathbf{R}$ и класса A (теорема 1). Найдены параметрические представления новых пространств целых

* Целая функция называется функцией класса A, если для ее корней $\{a_k\}$ выполнено условие $\sum|\operatorname{Im} a_k^{-1}|<\infty$.

функций $E_2^{\varrho+,\sigma-}(F^{-1}dx)$, которые могут включать в себе функции как конечного, так и бесконечного порядка (теорема 3). Даны параметрические представления пространств $H_{2,\sigma}^{+}(F^{-1}dx)$, намного более широких, чем H_2^{+} (теорема 2).

Введем необходимые обозначения.

Через A_+ обозначим совокупность целых функций с непустым множеством корней, положительных на $\mathbf{R}$ и класса A. Пусть $F\in A_+$ и $\{\lambda_k\}_1^m$ $(m\in\mathbf{N}\cup\{\infty\})$—последовательность корней функции F, лежащих в полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$. Тогда

$$F(z)=e^{2g(z)}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)e^{P_k\left(\frac{z}{\lambda_k}\right)}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{z}{\bar\lambda_k}\right)e^{P_k\left(\frac{z}{\bar\lambda_k}\right)},$$

где $g(z)$—целая вещественная функция, P_k—показатели Вейерштрасса. Положим

$$\Omega(z)=e^{g(z)}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)\exp\left\{\frac{1}{2}\left[P_k\left(\frac{z}{\lambda_k}\right)+P_k\left(\frac{z}{\bar\lambda_k}\right)\right]\right\}$$

при $m=\infty$ это произведение равномерно сходится). Пусть

$$\Phi_k(z)=\left(\frac{\operatorname{Im}\lambda_k}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{z-\bar\lambda_k}\prod_{n=1}^{k}\frac{z-\bar\lambda_n}{z-\lambda_n},\quad k=\overline{1,m},$$

(об истории возникновения этой системы см. в ([9])) и

$$\Omega_k(z)=\Omega(z)\Phi_k(z),\quad k=\overline{1,m}.$$

Обозначим

$$l_2^{(m)}=\{\{a_k\}_1^m: a_k\in\mathbf{C}\}(m\in\mathbf{N});\ l_2^{(\infty)}=l_2.$$

Наконец, пусть $H_2^{\pm}$—пространство функций $f(z)$, голоморфных при $\pm\operatorname{Im}z>0$, для которых

$$\sup_{y>0}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x\pm iy)|^2dx\right\}<+\infty$$

(см., например, ([2])).

Теорема 1. *Пусть $F\in A_+$. Для принадлежности функции f пространству $L_2(\mathbf{R};F^{-1}dx)$ необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде*

$$f(x)=\sum_{k=1}^{m}a_k\Omega_k(x)+\frac{\Omega(x)}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}h(\tau)e^{ix\tau}d\tau+$$

$$+\frac{\bar\Omega(x)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}h(\tau)e^{ix\tau}d\tau(\{a_k\}_1^m\in l_2^{(m)},\ h\in L_2(\mathbf{R})). \qquad (1)$$

При этом справедливы формулы обращения

$$a_k=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\bar\Omega_k(x)F^{-1}(x)dx,\ k=\overline{1,m}, \qquad (2)$$

$$h(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{\Omega(x)}e^{-ix\tau}dx,\quad \tau\in(0,\ +\infty), \tag{3}$$

$$h(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{\overline{\Omega}(x)}e^{-ix\tau}dx,\quad \tau\in(-\infty,\ 0), \tag{4}$$

и равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2F^{-1}(x)dx=\sum_{k=1}^{m}|a_k|^2+\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|^2d\tau. \tag{5}$$

(Интегралы в (1), (3), (4) сходятся в $L_2(\mathrm{R})$, а при $m=\infty$ и $\{a_k\}_1^\infty\in l_2^{(\alpha)}=l_2$ ряд

$$f_\Omega(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\Omega_k(z)$$

сходится безусловно в $L_2(\mathrm{R};\ F^{-1}dx)$ на R и равномерно на любом компакте плоскости C).

Пусть $F\in A_+$, $0\leqslant\sigma<\infty$. Обозначим через $H^+_{2,\sigma}(F^{-1}dx)$ пространство функций $f(z)$, для которых

$$e^{iz\sigma}f(z)\{\overline{\Omega}(z)\}^{-1}\in H_2^+,$$

где $\overline{\Omega}(z)=\overline{\Omega(\overline{z})}$.

Теорема 2. *Если* $F\in A_+$, $0\leqslant\sigma<\infty$, *то для принадлежности функции* f *пространству* $H^+_{2,\sigma}(F^{-1}dx)$ *необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде* (1) *с* $h(\tau)=0$ *при* $\tau<-\sigma$.

Пусть $F\in A_+$, $0\leqslant\sigma_+,\ \sigma_-<\infty$. Обозначим через $E_2^{\sigma_+,\sigma_-}(F^{-1}dx)$ пространство целых функций $f(z)$, таких, что

$$e^{i\sigma_+z}f(z)\{\overline{\Omega}(z)\}^{-1}\in H_2^+,\quad e^{-i\sigma_-z}f(z)\{\Omega(z)\}^{-1}\in H_2^-.$$

Теорема 3. *Если* $F\in A_+$, $0\leqslant\sigma_+,\ \sigma_-<\infty$, *то для принадлежности функции* f *пространству* $E_2^{\sigma_+,\sigma_-}(F^{-1}dx)$ *необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде* (1) *с* $h(\tau)=0$ *при* $\tau<-\sigma_+$ *и* $\tau>\sigma_-$.

В крайнем случае, когда $F(z)$ не имеет корней, теорема 1 переходит в теорему Планшереля [1], а теорема 2 (при $\sigma=0$) и теорема 3 (при $\sigma_+=\sigma_-$) переходят в теоремы Винера—Пэли [2]. В специальном случае, когда функция $F(z)$ имеет конечную степень, теорема 1 и теорема 3 (при $\sigma_+=\sigma_-$) эквивалентны упомянутым результатам Бохнера—Ахиезера—Гурария [3-5].

Дополнение. Если $w\geqslant0$—измеримая на R функция, то она удовлетворяет условию A_2 (кратко: $w\in(A_2)$), если

$$\sup_J\left\{|J|^{-2}\left(\int_J w\,dx\right)\left(\int_J w^{-1}dx\right)\right\}<+\infty,$$

где $J\subset\mathrm{R}$—произвольный интервал, $|J|$—его длина.

Путём перехода от степенных (A_2)-весов к общим весам $w \in (A_2)$ Г. М. Губреевым [11] были изучены обобщенные интегральные преобразования Фурье—Джрбашяна в пространствах $L_2(\mathrm{R}; w dx)$ и установлены параметрические представления их специальных подпространств, голоморфных в полуплоскости $\mathrm{Im} z > 0$, и подпространств целых функций экспоненциального типа. Ядра $y(x; \tau)$ этих преобразований определены в [11] как решения определенных интегральных уравнений. В важном случае, когда $w(x) = |x|^{\omega}$, $-1 < \omega < 1$, эти преобразования переходят в преобразования Фурье—Джрбашяна с ядрами типа Миттаг—Леффлера первого порядка роста.

Если вместо $\exp(ix\tau)$ использовать ядра $y(x; \tau)$, то теоремы 1—3 обобщаются на пространства $L_2(\mathrm{R}; wF^{-1}dx)$, $w \in (A_2)$, $F \in A_+$, и их подпространства голоморфных в полуплоскости $\mathrm{Im} z > 0$ функций и подпространства целых функций.

Институт математики Академии наук
Армянской ССР

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Ֆուրյեի ձևափոխությունը կշռային $L_2 \mathrm{R}$ տարածություններում

Աշխատանքի թեորեմ 1-ում հաստատված է, որ $L_2(\mathrm{R}; F^{-1}dx)$ տարածության կամայական f ֆունկցիայի համար հնարավոր է Ֆուրյե—Պլանշերելյան վերլուծություն, եթե միայն F-ը իրական առանցքի վրա դրական A դասի ամբողջ ֆունկցիա է։ Թեորեմ 2-ում տրված է $\mathrm{Im} z > 0$ կիսահարթությունում հոլոմորֆ ֆունկցիաների $H^{-}_{2,\gamma}(F^{-1}dx)$ տարածության պարամետրական ներկայացումը։ Թեորեմ 3-ում տրված են ամբողջ ֆունկցիաների նոր տիպի տարածությունների պարամետրական ներկայացումները։ Թեորեմ 1-ը և թեորեմ 3-ը հայտնի էին միայն այն դեպքում, երբ F-ի աստիճանը վերջավոր է, իսկ թեորեմ 2-ը՝ երբ $F(z) \equiv 1$ (տես՝ [1-5]).

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *M. Plancherel*, Rend. Circolo Math. Palermo, v. 30, p. 289—335 (1910). [2] *Н. Винер, Р. Пэли*, Преобразование Фурье в комплексной области, Наука, М., 1964. [3] *С. Бохнер*, Лекции об интегралах Фурье, Физматгиз, М., 1962. [4] *Н. И. Ахиезер*, ДАН СССР, т. 96, с. 889—892 (1954). [5] *В. П. Гурарий*, Мат. сб., т. 58 (100), с. 439—452 (1962). [6] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 95, с. 1133—1136 (1954); Изв. АН СССР, Сер. мат., т. 19, с. 133—180 (1955). [7] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, М., 1966. [8] *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян*, ДАН СССР, т. 120, с. 457—460 (1958); Сиб мат. ж., т. 1, с. 383—426 (1960). [9] *М. М. Джрбашян*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 14, с. 446—493 (1979). [10] *R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. L. Weeden*, Trans. Am. Math. Soc., v. 176, p. 227—252 (1973). [11] *Г. М. Губреев*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 21, с. 306—310 (1986).