ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Том 88 1989 №1

УДК 513.88

МАТЕМАТИКА

Р. В. Акопян

# Об одном новом выводе формулы следов для самосопряженных и унитарных операторов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 15/VI 1988)

В заметке дается новый вывод формулы следов, единый как для самосопряженных, так и для унитарных операторов. Техника, используемая при этом выводе, может быть применена и при решении других задач.

1. Пусть $H$—сепарабельное гильбертово пространство.

Ограниченный оператор $T$ в $H$ называется *диссипативным*, *если*

$$\operatorname{Im} T=\frac{T-T^{*}}{2i}\geqslant 0.$$

Лемма 1. *Пусть $T$ ограниченный диссипативный оператор, для которого существует ограниченный обратный. Тогда можно определить* $\ln T$ *таким образом, чтобы*

$$0\leqslant \operatorname{Im}\ln T\leqslant \pi I.$$

Доказательство. Выделим однозначную аналитическую ветвь $\ln z$, сделав разрез вдоль отрицательной мнимой оси, и выберем ту ветвь $\ln z$, для которой $-\pi/2<\arg z<3\pi/2$.

Определим $\ln T$ с помощью интеграла Рисса:

$$\ln T=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\ln z(T-zI)^{-1}dz,$$

где контур $\Gamma$ лежит в области аналитичности $\ln z$ и содержит внутри себя весь спектр оператора $T$.

Теперь воспользуемся следующей теоремой Т. Като ([1]): пусть $f(z)$ аналитическая функция в области $G$ и $T$ ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $H$, спектркоторого содержится в $G$. Если числовая область оператора $T$ содержится в $G$, тогда числовая обльсть оператора $f(T)$ содержится в замкнутой выпуклой оболочке $f(G)$.

Пусть $f_\varepsilon(z)=\ln(z+i\varepsilon)$, $\varepsilon>0$. Тогда при $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ $f_\varepsilon(z)$ является аналитической функцией и $0\leqslant\operatorname{Im} f_\varepsilon(z)\leqslant\pi$. Из указанной теоремы Т. Като следует, что $0\leqslant\operatorname{Im} f_\varepsilon(T)\leqslant\pi I$. Поскольку $f_\varepsilon(z)\to\ln z$, причем сходимость равномерная в окрестности спектра оператора $T$, то $f_\varepsilon(T)$ сходится по норме операторов к $\ln T$ ([2]). Откуда следует, что

$$0\leqslant\operatorname{Im}\ln T\leqslant\pi I.$$

2. Пусть $A_1$ и $A_2$—самосопряженные операторы, причем $A_2-A_1=V\in\gamma_1$ ($\gamma_1$—класс ядерных операторов).

Предположим, что $V\geq 0$. Пусть $D(z)=V^{\frac{1}{2}}R_z(A_1)V^{\frac{1}{2}}$, где $R_z(A_1)$—резольвента оператора $A_1$ и

$$\Delta(z)=\Delta_{A_2/A_1}(z)=\det(A_2-zI)(A_1-zI)^{-1}=\det(I+VR_z(A_1))\ (\mathrm{Im}\,z\neq 0).$$

Известно, что [3] $\Delta(z)=\det D(z)$.

Очевидно, что $D(z)$ диссипативный оператор при $\mathrm{Im}\,z>0$. Легко убедиться, что $D(z)$ имеет непрерывный обратный.

По лемме 1 при $\mathrm{Im}\,z>0$ можно определить аналитическую функцию $\ln D(z)$ так, что $0\leqslant \mathrm{Im}\ln D(z)\leqslant\pi I$.

Отсюда согласно результатам работы [4] $\ln D(z)$ допускает следующее интегральное представление:

$$\ln D(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B(\lambda)d\lambda}{\lambda-z},$$

где $B(\lambda)$ суммируемая функция, для п. в. $\lambda$ $0\leqslant B(\lambda)\leqslant I$ и $B(\lambda)\in\gamma_1$.

Так как $\ln D(z)\in\gamma_1$, то

$$\mathrm{sp}\ln D(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sp}B(\lambda)d\lambda}{\lambda-z}.$$

Поскольку $\mathrm{sp}\ln D(z)=\ln\det D(z)$, то

$$\ln\Delta(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sp}B(\lambda)d\lambda}{\lambda-z}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(\lambda)d\lambda}{\lambda-z},$$

где $\xi(\lambda)=\mathrm{sp}B(\lambda)\in L_1(-\infty,\infty)$.

Как известно [5], с помощью этого представления устанавливается формула следов для самосопряженных операторов.

Далее через $H$, $H'$, $X$ будем обозначать сепарабельные гильбертовы пространства, а $B(H,H')$—пространство всех ограниченных линейных операторов из $H$ в $H'$, $L^2(\Delta,X)$—пространство $X$-значных измеримых функций $f(t)$, определенных на $\Delta=[-\pi,\pi]$, для которых

$$\int_{\Delta}\|f(t)\|^2dt<\infty.$$

Следуя Т. Като [6], введем следующее понятие: пусть $U$ унитарный оператор в $H$, а $A\in B(H,H')$. Оператор $A$ называется *$U$-гладким*, если

$$\sup_{|z|\neq 1,\ x\in H,\ x\neq 0}|([(U+zI)(U-zI)^{-1}+(U^{-1}+\bar zI)(U^{-1}-\bar zI)^{-1}]A^*x,A^*x)|/4\pi\|x\|^2=$$
$$=\|A\|_u^2<\infty.$$

Небольшие видоизменения в рассуждениях Като [7] приводят к следующим результатам:

а) *Если $A$ является $U$-гладким оператором, то сингулярное* *подпространство* $H^s(U)$ *оператора* $U$ *входит в ядро оператора* $A$, *т. е.* $Ax=0$, *если* $x \in H_s(U)$, *и*

$$\|A\|_u^2 = \sup_{x\in H, x\neq 0} \sum_{-\infty}^{\infty} \|AU^n x\|^2/\|x\|^2 = \sup_I \|AE_U(I)\|^2/|I|,$$

*где* $E_U$*—спектральная мера оператора* $U$, $I$*—любой интервал из* $[-\pi, \pi]$, *а* $|I|$*—длина интервала* $I$.

б) *Пусть* $H=L^2(\Delta, X)$, $U$*—оператор умножения на* $e^{it}$ *в этом пространстве и* $A \in B(H, H')$ *является* $U$*-гладким оператором, тогда существует* $B(H', X)$*-значная слабо измеримая функция* $F(t)$, *определенная на* $\Delta$ *так, что*

1) $\|F(t)\| \leq \|A\|_U$ и $A^*x' = \{F(t)x'\}$ *для любого* $x' \in H'$,

2) $Ax = \int_\Delta F^*(t)x(t)dt, \quad x=\{x(t)\} \in H.$

Из первой части утверждения а) следует, что при рассмотрении $U$-гладкости оператора $A$, не нарушая общности, можно предполагать, что $U$ абсолютно непрерывна.

Пусть $U_1$ и $U_2$—два унитарных оператора, причем $U_2-U_1=V\in\gamma_1$. Тогда $U_2=(I+VU_1^{-1})U_1=(I+T)U_1$, $T=VU_1^{-1}\in\gamma_1$. Так как $(I+T)$—унитарный оператор, то $T=\sum_j \tau_j(\cdot, \varphi_j)\varphi_j$; $1+\tau_j=\exp(i\theta_j)$, $\mathrm{sp}T=\sum_j \tau_j$ $(-\pi<\theta_j\leq\pi)$. Поскольку $|\tau_j|=2|\sin\theta_j/2|$, $\sum_j|\tau_j|<\infty$, то $\sum_j|\theta_j|<\infty$. Предположим, что $0\leq\theta_j\leq\pi$. Пусть $D(z)=(U_2-zI)(U_1-zI)^{-1}=I+VR_z(U_1)$ $(|z|\neq 1)$ и $D_1(z)=\tilde{U}D(z)$, где $\tilde{U}=(U_2U_1^{-1})^{-1/2}$. Очевидно, что $\tilde{U}=I+T_1$, $T_1\in\gamma_1$ и $\det\tilde{U}=\prod_j \exp(-i\theta_j/2)$. Легко проверить, что $D_1(z)$ при $|z|<1$ является диссипативным оператором и имеет ограниченный обратный.

По лемме 1 можно определять $\ln D_1(z)$ $(|z|<1)$ так, что

$$0\leq \operatorname{Im}\ln D_1(z)\leq \pi I \text{ или } 0\leq \operatorname{Re}(-i\ln D_1(z))\leq \pi I.$$

Согласно обобщенной теореме Рисса—Герглотца ([8])

$$\ln D_1(z) = \frac{i}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, dF(t),$$

так как $\operatorname{Im}(-i\ln D_1(o))=O$.

Здесь $F(t)$ $(-\pi\leq t\leq\pi)$—неубывающая неотрицательная оператор-функция. По теореме Наймарка ([8]) существует такое гильбертово пространство $H'$, разложение единицы $E(t)$ $(-\pi\leq t\leq\pi)$ в $H'$ и ограниченное линейное отображение $A$ из $H'$ в $H$, что

$$F(t)=AE(t)A^*.$$

Пусть $U$ тот унитарный оператор в $H'$, для которого $E(t)$ является разложением единицы, тогда

$$\ln D_1(z) = \frac{i}{2} A(U+zI)(U-zI)^{-1}A^*.$$

Лемма 2. *Оператор $A$ является $U$-гладким оператором, причем* $\|A\|_U \leq 1$.

Используя лемму 2 и утверждение б), нетрудно установить, что

$$A(U+zI)(U-zI)^{-1}A^* = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} B(t)dt,$$

где $B(t)$—суммируемая оператор-функция, для п. в. $t$ $O \leq B(t) \leq I$.

Таким образом

$$\ln D_1(z) = \frac{i}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} B(t)dt.$$

Так как $\qquad \ln D_1(o) = \ln(U_2U_1^{-1})^{\frac{1}{2}} = \frac{i}{2} \sum_k \theta_k(\,\cdot\,, \varphi_k)\varphi_k,$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi} B(t)dt = \sum_k \theta_k(\,\cdot\,, \varphi_k)\varphi_k.$$

Отсюда из неотрицательности оператора $B(t)$ следует, что $B(t) \in \gamma_1$ для п. в. $t \in [-\pi, \pi]$.

Поскольку $\ln D_1(z) \in \gamma_1$, то

$$\mathrm{sp}\ln D_1(z) = \frac{i}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \mathrm{sp}B(t)dt = \frac{i}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \eta(t)dt,$$

где $\eta(t) = \mathrm{sp}B(t)$.

Откуда уже нетрудно получить формулу

$$\ln\Delta(z) = \frac{i}{2} \sum_k \theta_k + \frac{i}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \eta(t)dt, \tag{1}$$

где $\qquad \Delta(z) = \det D(z).$

Итак установлена

Теорема. *Пусть $U_1$ и $U_2$—два унитарных оператора, причем*

$$U_2 - U_1 = V \in \gamma_1 \text{ и } \Delta(z) = \det(U_2 - zI)(U_1 - zI)^{-1} \quad (|z| \neq 1).$$

*Тогда существует вещественная измеримая функция $\eta(t) \in L_1(-\pi, \pi)$ такая, что имеет место формула* (1), *при этом*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \eta(t)dt = \sum_k \theta_k.$$

Формула следов для унитарных операторов устанавливается с помощью этой теоремы известным способом ([9]).

Ереванский государственный университет

Ռ. Վ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

## Ինքնահամալուծ և ունիտար օպերատորների համար հետքերի բանաձևի մի նոր ապացույցի մասին

*Հոդվածում տրվում է հետքերի բանաձևի մի նոր ապացույց, որը հիմնված է սահմանափակ հակադարձ ունեցող դիսիպատիվ օպերատորի համար լոգարիթմի սահմանման վրա։ Այդ ապացույցը միանման է, ինչպես ինքնահամալուծ, այնպես էլ ունիտար օպերատորների համար։ Ապացույցի ժամանակ ստացված ինտեգրալ ներկայացումները կարող են օգտագործվել նաև այլ խնդիրներ լուծելու համար։*

### ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *T. Kato*, Proc. Japan. Acad., v. 41 (1965). [2] *Н. Данфорд, Дж. Шварц*, Линейные операторы, Общая теория, ИЛ, М., 1962. [3] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, Наука М., 1965. [4] *R. Carey*, Jorn. für Math., B. 283/284 (1975). [5] *М. Г. Крейн*, Мат. сб. т. 33 (75), № 3 (1968). [6] *T. Kato*, Math. Ann., v. 162 (1966). [7] *T. Kato*, Studia Math., v. 31 (1968). [8] *М. С. Бродский*, Треугольные и жордановы представления линейных операторов, Наука, М., 1969. [9] *М. Г. Крейн*, ДАН СССР 144, № 2 (1962).