УДК 529.3.01

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

К. Г. Гулян, Г. Г. Мхитарян, С. М. Мхитарян

О концентрации напряжений возле щелей или тонких включений в неоднородной среде при антиплоской деформации

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 24/V 1988)

Ряд важных вопросов о концентрации напряжений возле щелей или абсолютно жестких тонких включений в однородных упругих средах исследован в (1-2). Многие результаты в этом направлении отражены также в (3-4).

В настоящей статье рассматривается вопрос об определении основных характеристик концентрации напряжений возле системы произвольного числа щелей или тонких абсолютно жестких включений, расположенных на одной линии в находящемся в условиях антиплоской деформации бесконечном пространстве, модуль упругости которого по вертикальной координате изменяется по степенному закону.

1. Пусть упругое неоднородное бесконечное пространство, отнесенное к правой прямоугольной системе координат Oxz , состоит из верхнего и нижнего полупространств, причем верхнее полупространство $z > 0$ обладает модулем упругости $E = E_+ |z|^\alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$) и коэффициентом Пуассона ν_+ , а нижнее полупространство $z < 0$ модулем упругости $E = E_- |z|^\alpha$ и коэффициентом Пуассона ν_- . Пусть далее это пространство в плоскости $z = 0$ содержит систему S щелей вдоль оси Oy щелей

$$\Omega = \left\{ z=0; \bigcup_{k=1}^N a_k \leq x \leq b_k, -\infty < y < \infty \right\} \quad (k=1, 2, \dots, N);$$

$$(a_{k-1} < b_{k-1} < a_k; k=1, 2, \dots, N, b_N > a_N)$$

и нагружено такими силовыми факторами (приложенными к берегам щелей касательными силами по направлению Oy или равномерно распределенными на бесконечности касательными силами в том же направлении или же сосредоточенными вдоль определенных линий, параллельных оси Oy , и равномерно распределенных по ним силами), которые обеспечивают возможность нахождения пространства в условиях антиплоской деформации с базовой плоскостью Oxz . Тогда отличной от нуля будет только компонента смещений $v(x, z)$ в направлении оси Oy и можно ограничиться рассмотрением системы линейных щелей

$$L = \left\{ z=0; \sum_{k=1}^N a_k \leq x \leq b_k \right\} \quad (k=1, 2, \dots),$$

в плоскости Oxz , являющейся следом указанной выше системы щелей

Ω в этой плоскости. При этом поскольку при помощи известного способа воздействия всех силовых факторов можно свести к нагрузкам, приложенным к берегам щелей, то будем считать, что

$$\tau_{xy}|_{z=0} = -\tau(x) \quad (x \in L), \quad (1.1)$$

тем самым предполагая, что верхние и нижние берега щелей нагружены касательными силами разных интенсивностей.

Выведем разрешающие уравнения поставленной задачи. С этой целью плоскость (xz -осью Ox разрежем на верхнюю (+) и нижнюю (-) полуплоскости и запишем выражение вертикальных смещений их граничных точек. В соответствии с (1.1) введя в рассмотрение функции

$$T_{\pm}(x) = \begin{cases} \tau_{\pm}(x) & (x \in L); \\ \tau(x) & (x \in L'; L' = R/L; R = \{z=0; |x| < \infty\}), \end{cases}$$

согласно известным результатам (1.5) будем иметь

$$v_{\pm}(x, 0) = v_{\pm}(x) = \pm \frac{\vartheta_{\pm}}{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_{\pm}(s) ds}{|x-s|^{\nu}} \quad (-\infty < x < \infty), \quad (1.2)$$

$$\vartheta_{\pm} = 2(1 + \sigma_{\pm}) \Gamma(1 + \nu/2) \{ \sqrt{\pi} E_{\pm} \Gamma[(1 + \nu)/2] \}^{-1},$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Далее введя в рассмотрение скачок смещений на щели

$$\Phi(x) = v_{+}(x) - v_{-}(x); \quad \Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & (x \in L); \\ 0 & (x \in L'), \end{cases} \quad (-\infty < x < \infty)$$

из (1.2) получим уравнение

$$\frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(s) ds}{|x-s|^{\nu}} = \Phi(x) \quad (-\infty < x < \infty), \quad (1.3)$$

$$T(x) = \vartheta_{+} T_{+}(x) + \vartheta_{-} T_{-}(x).$$

Если теперь обратить (6) уравнение (1.3), придем к следующему ключевому уравнению:

$$T(x) = \frac{\nu \operatorname{ctg}(\pi\nu/2)}{2\pi} \int_L \frac{\operatorname{sgn}(x-s) \varphi'(s) ds}{|x-s|^{1-\nu}} \quad (-\infty < x < \infty). \quad (1.4)$$

Рассматривая ключевое уравнение (1.4) на системе щелей L , придем к следующему разрешающему интегродифференциальному уравнению:

$$\frac{\nu \operatorname{ctg}(\pi\nu/2)}{2\pi} \int_L \frac{\operatorname{sgn}(x-s) \varphi'(s) ds}{|x-s|^{1-\nu}} = f(x) \quad (x \in L) \quad (1.5)$$

$$f(x) = \vartheta_{+} \tau_{+}(x) + \vartheta_{-} \tau_{-}(x),$$

которое должно рассматриваться при граничных условиях

$$\varphi(a_k) = \varphi(b_k) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, N), \quad (1.6)$$

выражающих условия непрерывности смещений $v_{\pm}(x)$ в концевых точках щелей. Рассматривая же (1.4) на L' , определим напряжения вне L на линии продолжения щелей:

$$\tau(x) = \frac{\nu \operatorname{tg}(\pi\nu/2)}{2\pi(\vartheta_0^+ + \vartheta_0^-)} \int_L \frac{\operatorname{sgn}(x-s)\varphi'(s)ds}{|x-s|^{1-\nu}} \quad (x \in L'). \quad (1.7)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению интегродифференциального уравнения (1.5) при условиях (1.6), после чего касательные напряжения вне щелей сразу определяются по формуле (1.7).

Предельный переход $\nu \rightarrow 0$ в (1.5) и (1.7) приводит к основным уравнениям

$$\frac{1}{\pi^2} \int_L \frac{\varphi'(s)ds}{s-x} = -f_0(x) \quad (x \in L),$$

$$f_0(x) = \vartheta_0^+ \tau_+(x) + \vartheta_0^- \tau_-(x); \quad \vartheta_0^{\pm} = 2(1 + \varepsilon_{\pm})/\pi E_{\pm},$$

$$\tau(x) = -\frac{1}{\pi^2(\vartheta_0^+ + \vartheta_0^-)} \int_L \frac{\varphi'(s)ds}{s-x} \quad (x \in L')$$

обсуждаемой задачи для обычного упругого неоднородного пространства, находящегося в условиях антиплоской деформации.

Рассмотрим частный случай, когда $L = \{z=0; x \geq 0\}$, т. е. случай полубесконечной щели. Тогда уравнение (1.5) и условия (1.6) примут соответственно вид

$$\frac{\nu \operatorname{ctg}(\pi\nu/2)}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-s)\varphi'(s)ds}{|x-s|^{1-\nu}} = f(x) \quad (x > 0). \quad (1.8)$$

$$\varphi(0) = 0. \quad (1.9)$$

Чтобы построить решение уравнения (1.8), воспользуемся ортогональным интегральным соотношением (*)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^{1-\nu}} s^{-\nu/2} J_{-\nu}(i\sqrt{s}) ds =$$

$$= \frac{2^{\nu} \operatorname{sec}(\pi\nu/2)}{\Gamma(1-\nu)} \lambda^{-\nu} x^{(\nu-1)/2} J_{1-\nu}(i\sqrt{x}),$$

где $\lambda, x > 0$, $\nu = (1+\nu)/2$, а $J_{\mu}(x)$ — функция Бесселя первого рода. Исходя из (1.10), решение уравнения (1.8) представим в виде

$$\varphi'(x) = x^{-\nu/2} \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) J_{-\nu}(i\sqrt{\lambda x}) d\lambda \quad (x > 0). \quad (1.11)$$

Подстановка (1.11) в (1.8) с учетом (1.10) после некоторых преобразований даст

$$\Phi(\lambda) = \frac{\Gamma(1-\nu)\lambda^{1+\nu}}{2^\nu \nu \operatorname{cosec}(\pi\nu/2)} \int_0^\infty x^{(1-\nu)/2} f(x) J_{1-\nu}(i\sqrt{x}) dx, \quad (1.12)$$

причем для сходимости последнего интеграла достаточно, чтобы

$$f(x) = O(x^{\alpha-1})(x \rightarrow 0); \quad f(x) = O(x^{-\nu/4-1}) \quad (\varepsilon > 0, x \rightarrow \infty).$$

Теперь, проинтегрировав (1.11) и учитывая (1.9), находим

$$\varepsilon(x) = 2x^{(1-\nu)/2} \int_0^\infty \Phi(\lambda) J_{1-\nu}(i\sqrt{x}) d\lambda \quad (x \geq 0). \quad (1.13)$$

Таким образом, в разбираемом частном случае решение разрешающего уравнения (1.8) — (1.9) дается формулами (1.12) — (1.13).

Отметим, что для вычисления коэффициента интенсивности напряжений можно пользоваться развитой в (8) методикой, где, как и в (9-10), рассмотрены другие частные случаи L при плоской деформации.

2. Теперь в такой же постановке, как выше, для упругого неоднородного указанного типа бесконечного пространства, находящегося в условиях антиплоской деформации, обсудим аналогичную задачу о включениях, когда система сквозных щелей Ω заменяется системой абсолютно жестких тонких включений идентичной конфигурации, причем включения в вертикальном направлении не сопротивляются изгибу. В этой задаче, сохраняя прежние обозначения, требуется определить скачок касательных напряжений $T(x) = T_+(x) - T_-(x)$ на системе включений L , а также касательные напряжения $\tau(x)$ и вертикальные смещения $v(x) = v_+(x) = v_-(x)$ вне L , т. е. на L' . При этом считается, что

$$v_+(x, 0) = v_+(x) = v_-(x, 0) = v_-(x) = f(x) \quad (x \in L), \quad (2.1)$$

где $f(x)$ — наперед заданная функция, обусловленная приложенными к бесконечному телу силовыми факторами.

Выведем разрешающие уравнения поставленной задачи. Для этого равенства (1.2) рассмотрим как интегральные уравнения относительно $T_\pm(x)$ и их обратим. В результате будем иметь

$$T_\pm(x) = \pm \frac{\nu \operatorname{ctg}(\pi\nu/2)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^{1-\nu}} \cdot \frac{v'_\pm(s)}{\nu} ds \quad (-\infty < x < \infty),$$

откуда

$$T(x) = \frac{\nu \operatorname{ctg}(\pi\nu/2)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-s)}{|x-s|^{1-\nu}} \bar{V}'(s) ds \quad (-\infty < x < \infty), \quad (2.2)$$

$$\bar{V}(x) = (\nu^+)^{-1} v_+(x) + (\nu^-)^{-1} v_-(x).$$

В свою очередь обращая уравнение (2.2), приходим к следующему ключевому интегральному уравнению задачи:

$$\frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{T}(s) ds}{|x-s|^v} = \tilde{V}(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2.3)$$

Далее рассматривая ключевое уравнение (2.3) на системе включений и учитывая (2.1), приходим к разрешающему интегральному уравнению задачи ($x \in L$)

$$\int_L \frac{\tilde{T}(s) ds}{|x-s|^v} = \tilde{v} f(x) \quad (\tilde{v} = (\tilde{v}^+)^{-1} + (\tilde{v}^-)^{-1}), \quad (2.4)$$

которое должно рассматриваться при условиях

$$\int_{a_k}^{b_k} \tilde{T}(x) dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (2.5)$$

выражающих статические условия равновесия включений. Рассматривая же ключевое уравнение (2.3) на L' , находим

$$v(x) = (v\tilde{v})^{-1} \int_L \frac{\tilde{T}(s) ds}{|x-s|^v} \quad (x \in L') \quad (2.6)$$

Таким образом, после того, как найденное решение уравнения (2.4)–(2.5), вертикальные смещения вне включений будут определяться по (2.6).

С другой стороны, поскольку в обсуждаемой задаче $v_+(x) - v_-(x) = \Phi(x) = 0$ ($-\infty < x < \infty$), то из (1.3) или (1.4) вытекает, что $T(x) = \tilde{v}^+ T_+(x) + \tilde{v}^- T_-(x) = 0$ ($-\infty < x < \infty$), откуда

$$T_-(x) = -\tilde{v}^+ (\tilde{v}^-)^{-1} T_+(x) \quad (x \in L); \quad v(x) = 0 \quad (x \in L').$$

В заключение отметим, что в частном случае одного полубесконечного включения решения разрешающих уравнений (2.4)–(2.6) в явном виде можно построить при помощи результатов из (11).

Ереванский институт народного хозяйства
Институт механики Академии наук Армянской ССР

Կ. Գ. ՂՈՒՆԱՆ, Գ. Գ. ՄԵԼԻՍՅԱՆ, Ս. Մ. ՄԵԼԻՍՅԱՆ

Անհամասեռ միջավայրում հախերի և բարակ ներդրակների
չբախված լարումների կենտրոնացումների մասին
հսկայաբար դեֆորմացիայի դեպքում

Դիտարկվում է հակահարթ դեֆորմացիայի պայմաններում գտնվող անվերջ տարածությունում մի գծի հրկայնքով դասավորված կամայական թվով ճարերի կամ բարակ բացարձակ կոշտ ներդրակների համակարգերի շրջավայրում լարումների կենտրոնացումների հիմնական բնութագրիչների որոշման հարցը, երբ տարածության առաձգականության մոդելը ըստ ուղղահայաց կոորդինատի փոփոխվում է սուսիճանային օրենքով:

Խնդրի լուծումը բերվում է, որոշակի հզորային պայմաններով, ինտեգրա-

դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումներ, որոնց կորիզները աստիճանային տիպի ֆունկցիաներ են: Նշված են մի շարք մասնավոր դեպքեր, երբ քննարկվող խնդիրների լուծումները կարելի է կառուցել փակ տեսքերով, որոնք սարունակում են ինտեգրալներ կամ օրթոգոնալ բազմանդամներով անվերջ շարքեր: Մասնավորապես, կիսաանվերջ ճարի կամ ներդրակի դեպքում կառուցված են համապատասխան որոշիչ հավասարումների փակ լուծումները:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Г. Я. Попов, Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений, Наука, М., 1982. ² Л. Т. Бережницкий, В. В. Панасюк, Н. Г. Стацук, Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле, Наукова думка, Киев, 1983. ³ Г. П. Черепанов, Механика хрупкого разрушения, Наука, М., 1974. ⁴ Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976. ⁵ Г. Я. Попов, Контактные задачи для линейно-деформируемого основания, Вища школа, Киев-Олесса, 1982. ⁶ Ф. Д. Гихов, Краевые задачи, Наука, М., 1977. ⁷ С. М. Мхитарян, ДАН АрмССР, т. 74, № 4, с. 175—182 (1982). ⁸ С. М. Мхитарян, Изв. АН АрмССР, Механика, т. 38, № 4, с. 16—29 (1985). ⁹ С. М. Мхитарян, в кн: Механика неоднородных структур, Наукова думка, Киев, с. 149—156, 1986. ¹⁰ Г. Я. Попов, М. В. Радиоло, ПМ, т. 11, вып. 5, с. 36—44 (1975): ¹¹ С. М. Мхитарян, Изв. АН СССР, МТТ, № 1, с. 63—72, 1983.