ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVII 1988 5

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

А. Г. Багдасарян

Интерполяция и следы функций из некоторых функциональных пространств

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Б. Нерсесяном 12/X 1988)

При изучении граничных задач для общих гипоэллиптических операторов в пространствах типа Соболева—Лиувилля приходится рассматривать некоторые функциональные пространства типа Никольского—Бесова, являющиеся, как и в классическом случае, интерполяционными для соответствующих пространств Соболева—Лиувилля.

Теория этих пространств, в классическом случае, во всей полноте (эквивалентные нормы, вложения разных метрик и разных измерений, интерполяция и т. д.) изложена в монографиях ([1-4]).

В настоящей заметке изучаются свойства (следы, интерполяция) некоторых пространств типа H и B, являющихся обобщениями соответственно классических пространств Соболева—Лиувилля и Никольского—Бесова. Обобщениями перечисленных пространств в разных терминах занимались многие авторы. Отметим работы Х. Трибеля, М. Л. Гольдмана, Г. А. Калябина и др.

В работе ([5]) Трибеля и Штёкерта предложен обобщенный метод декомпозиции, позволяющий с единой точки зрения подойти к различным пространствам, оставаясь в рамках которого, однако, невозможно получить рассматриваемые здесь B пространства. Этот метод был существенно развит в работе М. Л. Гольдмана ([6]) за счет использования покрытий.

Краткий обзор результатов относительно пространств типа Никольского—Бесова приведен П. И. Лизоркиным в дополнении к монографии ([4]).

1°. Будем пользоваться следующими обозначениями: R_n—n-мерное евклидово пространство, N_n^0—множество мультииндексов, т. е. векторов $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами. Если $\xi\in R_n$, $\alpha\in N_n^0$, то положим $|\alpha|=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j$, $\xi^\alpha=\prod_{j=1}^{n}\xi_j^{\alpha_j}$.

Определение 1. Непустой многогранник $\mathfrak{N}$ с вершинами из N_n^0 назовем полным, если начало координат N_n^0 является вершиной $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}$ имеет вершины на каждой оси координат N_n^0, отличные от начала координат. Полный многогранник $\mathfrak{N}$ назовем вполне правильным, если внешние нормали $(n-1)$ мерных некоординатных граней $\mathfrak{N}$ имеют только положительные координаты. Пусть $\mathfrak{N}$—вполне правильный многогранник с вершинами $\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^n, \beta^1, \ldots, \beta^N$, при этом вершина

a^j находится на j-той координатной оси ($j=1, 2, \ldots, n$) и $a^0=(0, \ldots, 0)$. Для каждого натурального числа m сопоставим многограннику $\mathfrak{M}$ функции

$$\nu(\xi)=\left(\sum_{j=1}^{n}\xi^{2a^j}+\sum_{i=1}^{N}\xi^{2\beta^i}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mu(\xi)=\mu_m(\xi)=|\nu(\xi)|^{\frac{1}{m}}. \tag{1}$$

Определение 2. Пусть $1<p<\infty$. Через $\Phi(\mu; R_n)$ обозначим множество систем функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ обладающих следующими свойствами:

а) $\varphi_k\in S(R_n)$, $(F\varphi_k)(\xi)\geqslant 0$, $k=0, 1, \ldots$;

б) $\operatorname{supp}F\varphi_k\subset\Omega_k\equiv\{\xi;\ \xi\in R_n,\ 2^{k-1}\leqslant\mu(\xi)\leqslant 2^{k+1}\}$, $k=1, 2, \ldots$;

$\operatorname{supp}F\varphi_0\subset\Omega_0\equiv\{\xi;\ \xi\in R_n,\ \mu(\xi)<2\}$: (2)

в) $\sum_{k=0}^{\infty}(F\varphi_k)(\xi)\equiv 1$, $\xi\in R_n$; (3)

г) $\|F\varphi_k\|_{M_p}\leqslant c$; $c>0$, $k=1, 2, \ldots$ (4)

Здесь F — оператор преобразования Фурье, M_p — пространство мультипликаторов Фурье типа (p, p), $S(R_n)$ — пространство быстро-убывающих, бесконечно дифференцируемых функций (см., например, [1]).

В [7] приведен пример системы из $\Phi(\mu; R_n)$.

Определение 3. Пусть функция $\mu(\xi)$ определена, как выше $-\infty<s<\infty$, S' — пространство медленно растущих распределений. Положим

а) при $1\leqslant p\leqslant\infty$

$$H_p^s(\mu; R_n)=\{f;\ f\in S',\ \|f\|_{H_p^s}=\|F^{-1}\{(1+\mu^2)^{\frac{s}{2}}Ff\}\|_{L_p}<\infty\},$$

б) при $1<p<\infty$, $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}\in\Phi(\mu; R_n)$

$$B_{p,q}^s(\mu; R_n)=\left\{f;\ f\in S',\ \|f\|_{B_{p,q}^s}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}2^{ksq}\|f*\varphi_k\|_{L_p}^q\right)^{1/q}<\infty\right\},\quad 1\leqslant q<\infty$$

$$B_{p,\infty}^s(\mu; R_n)=\left\{f;\ f\in S',\ \|f\|_{B_{p,\infty}^s}=\sup_k 2^{ks}\|f*\varphi_k\|_{L_p}<\infty\right\}.$$

Пространства $H_p^s(\mu; R_n)$ и $B_{p,q}^s(\mu; R_n)$ введены в [6] и [7] соответственно.

2°. Определение 4 (см. [3], [9]). Банахово пространство A_1 называется ретрактом банахова пространства A_0, если существуют операторы $S\in L(A_1, A_0)$, $R\in L(A_0, A_1)$ такие, что $RS=E$, где E — тождественный оператор в $L(A_1, A_1)$. При этом операторы R и S называются ретракцией и коретракцией соответственно.

Пусть $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}\in\Phi(\mu; R_n)$. Положим

$$\bar{\varphi}_k=\sum_{j=-2}^{2}\varphi_{k+j},\ \text{где}\ \varphi_l\equiv 0\ \text{при}\ l<0.$$

Тогда из (2) и (3) имеем

$$\overline{\varphi}_k * \varphi_k = \varphi_k, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

Положим далее для $f \in S'$ и $g = \{g_j\}_{j=0}^{\infty}$, $g_j \in S'$ $(j = 0, 1, \ldots)$

$$Sf = \{\varphi_j * f\}_{j=0}^{\infty}, \quad Rg = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\varphi}_j * g_j. \tag{5}$$

Оператор R определен только на тех последовательностях $\{g_j\}_{j=0}^{\infty}$, $g_j \in S'$ $(j = 0, 1, \ldots)$, для которых ряды, задающие Rg, сходятся в S'.

Теорема 1. *Пусть* $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$. *Тогда:*

а) *пространство* $H_p^s(\mu; R_n)$ *является ретрактом пространства* $L_p(l_2^s)$;

б) *пространство* $B_{p,q}^s(\mu; R_n)$ *является ретрактом пространства* $l_q^s(L_p)$,

(определение пространств $l_q^s(L_p)$, $L_p(l_q^s)$, см., например, в [3,9]).

Соответствующие операторы R и S определяются соотношениями (5).

Если для $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Psi(\mu; R_n)$ положить

$$F_{p,q}^s(\mu; R_n) = \left\{ f;\ f \in S',\ \|f\|_{F_{p,q}^s} = \left| \int_{R_n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} |f * \psi_k|^q \right)^{p/q} dx \right|^{1/q} < \infty \right\},$$

то из утверждения а) теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть* $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$. *Тогда*

$$H_p^s(\mu; R_n) = F_{p,2}^s(\mu; R_n).$$

Для банаховых пространств A_0, A_1 символы $[A_0, A_1]_\theta$, $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ означают интерполяционные пространства между A_0 и A_1, полученные соответственно комплексным и вещественным методами (см [3,9]).

Теорема 3. *Пусть* $0 < \theta < 1$, $s^* = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$,

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q^*} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Тогда

а) *при* $-\infty < s_0, s_1 < \infty$, $s_0 \neq s_1$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant r, q_0, q_1 \leqslant \infty$

$$(B_{p,q_0}^{s_0}(\mu; R_n),\ B_{p,q_1}^{s_1}(\mu; R_n))_{\theta,r} = B_{p,r}^{s^*}(\mu; R_n);$$

б) *при* $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q_0, q_1 \leqslant \infty$, $q_0 \neq q_1$

$$(B_{p,q_0}^{s}(\mu; R_n),\ B_{p,q_1}^{s}(\mu; R_n))_{\theta,q^*} = B_{p,q^*}^{s}(\mu; R_n);$$

в) *при* $-\infty < s_0, s_1 < \infty$, $s_0 \neq s_1$, $p^* = q^*$, $1 < p_0, p_1 < \infty$, $1 \leqslant q_0, q_1 \leqslant \infty$

$$(B_{p_0,q_0}^{s_0}(\mu; R_n),\ B_{p_1,q_1}^{s_1}(\mu; R_n))_{\theta,p^*} = B_{p^*,q^*}^{s^*}(\mu; R_n);$$

г) *при* $-\infty < s_0, s_1 < \infty$, $1 < p_0, p_1 < \infty$, $1 \leqslant q_0, q_1 \leqslant \infty$

$$[B_{p_0,q_0}^{s_0}(\mu; R_n),\ B_{p_1,q_1}^{s_1}(\mu; R_n)]_\theta = B_{p^*,q^*}^{s^*}(\mu; R_n);$$

д) *при* $-\infty < s_0, s_1 < \infty$, $s_0 \neq s_1$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$

$$(H_p^{s_0}(\mu; R_n),\ H_p^{s_1}(\mu; R_n))_{\theta,q} = B_{p,q}^{s^*}(\mu; R_n).$$

Утверждения а) — г) теоремы получаются из теоремы 1 и соот-

ветствующих интерполяционных формул для пространств $l_q^s(L_p)$ (см [3,9]), а утверждение д) доказано в [5].

3°. Пусть вполне правильный многогранник $\mathfrak{N}$ таков, что вершины $\beta^i (i=1, \ldots, N)$ находятся в $N_{n-1}^0 \equiv N_n^0|_{x_n=0}$. Пусть далее $\mathfrak{N}'$ — проекция многогранника $\mathfrak{N}$ на N_{n-1}^0. Тогда согласно (1) соответствующие многограннику $\mathfrak{N}$ функции ν и μ имеют вид

$$\nu(\xi)=\left(\xi_n^{2m}+\nu'^2(\xi')\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mu(\xi)=\left(\xi_n^{2m}+\nu'^2(\xi')\right)^{\frac{1}{2m}}, \quad \xi'=(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}). \tag{6}$$

Здесь и далее $m=|\alpha^n|$, (см. (1)), ν' и μ' — функции, отвечающие многограннику $\mathfrak{N}'$:

$$\nu'(\xi')=\left[\sum_{j=1}^{n-1}(\xi')^{2(\alpha^j)'}+\sum_{i=1}^{N}(\xi')^{2(\beta^i)'}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \mu'(\xi')=[\nu'(\xi')]^{\frac{1}{m}}, \quad \beta'=((\beta^i)', 0), \quad \alpha^j=$$

$$=((\alpha^j)', 0), \quad (i=1, 2, \ldots, N; \ j=1, 2, \ldots, n-1).$$

Рассмотрим оператор следа:

$$\mathfrak{R}'f=\left\{f(x', 0), \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', 0), \ \ldots, \ \frac{\partial^r f}{\partial x_n^r}(x', 0)\right\}, \quad f\in S(R_n).$$

Теорема 4. *Пусть* $1<p<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, $r=0, 1, \ldots$; $s>s+\frac{1}{p}$, *функции* μ *и* μ' *определены в* (6).

Тогда оператор следа (после продолжения по непрерывности)— есть ретракция

а) $H_p^s(\mu; R_n)$ на $\prod_{j=1}^{n} B_{p,q}^{s-\frac{1}{p}-j}(\mu'; R_{n-1})$.

б) $B_{p,q}^s(\mu; R_n)$ на $\prod_{j=1}^{n} B_{p,q}^{s-\frac{1}{p}-j}(\mu'; R_{n-1})$.

Если функция $\nu(\xi)$ (см. (6)) имеет вид

$$\nu(\xi)=\left(\sum_{i=k}^{n}\xi_i^{2m_i}+\nu'^2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1})\right)^{\frac{1}{2}}, \quad 2\leqslant k\leqslant n-1,$$

то повторным применением теоремы 4 можно получить следы на гиперплоскостях размерности $1, 2, \ldots, n-2$.

Ереванский государственный
университет

Ա. Գ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Ինտերպոլյացիա և որոշ ֆունկցիոնալ տարածությունների ֆունկցիաների հետքեր

Հոդվածում բերվում են Սոբոլև—Լիուվիլի և Նիկոլսկի—Բեսովի տիպի տարածությունների վերաբերյալ ինտերպոլյացիոն պնդումներ և թեորեմ նշված տարածություններից ֆունկցիաների հետքերի մասին։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. М. Никольский*, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, Наука, М., 1977. [2] *О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский*, Интегральные представления функций и теоремы вложения, Наука, М., 1975. [3] *Х. Трибель*, Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Мир, М., 1980. [4] *Х. Трибель*, Теория функциональных пространств, Мир, М., 1986. [5] *B. Stöckert, H. Triebel*, Math. Nachr., v. 89, p. 267–267 (1979). [6] *М. Л. Гольдман*, Труды МИАН СССР, т. 156, с. 47—81 (1980). [7] *А. Г. Багдасарян*, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 23, № 4, с. 353—365 (1988). [8] *Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях*, УМН, т. 20, № 1, с. 3—74 (1965). [9] *Й. Бергх, Й. Лефстрём*, Интерполяционные пространства. Введение, Мир, М., 1980.