ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXVII 1988 5

УДК 517.5:519.72

МАТЕМАТИКА

А. А. Петросян

Оценки спектров дискретных преобразований Фурье

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 10/IX 1988)

1. Пусть $\bar{x}$ — исходный вектор из некоторого линейного метрического пространства векторов размерности N (X, ρ). Φ—оператор Фурье

$$\Phi : X \to Y,$$

задаваемый $N\times N$-матрицей отсчетов базисных функций некоторой ортогональной системы. S_m—комплексный функционал выбора размерности $m<N$ над Y:

$$S_m : Y \to \mathbf{C}^m$$

$$W : \mathbf{C}^m \to Y\text{—оператор восстановления.}$$

Обозначим через ε_Φ следующую величину:

$$\varepsilon_\Phi = \sup_{\bar{x}\in X} \rho(\bar{x}, \Phi^{-1} W S_m \Phi \bar{x})$$

(будем считать ее конечной). Задача состоит в отыскании при фиксированном m операторов S_m и W таких, что

$$\varepsilon_\Phi \to \min.$$

В случае, когда $\Phi = F$ есть матрица дискретного преобразования Фурье (ДПФ), компоненты вектора $\bar{y} = F\bar{x}$ представляются в виде:

$$y_l = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp\left(-\frac{2\pi i k l}{N}\right),$$

где x_k—компоненты вектора $\bar{x}$. В работе ([1]) установлено, что если исходный вектор $\bar{x}$ принадлежит классу векторов с действительными компонентами

$$X_\Delta = \{(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) : \max_{1\le k\le N-1} |x_{k-1} - x_k| \le \Delta\}, \quad \Delta > 0,$$

то

$$|y_l| \le \frac{\Delta}{\sin\frac{\pi l}{N}}, \quad l = \overline{1, N-1}. \tag{1}$$

В ([2]) эта оценка улучшена для целых номеров $l = \frac{N}{2}$ и $\frac{N}{4}$ в 2 раза.

В настоящей работе приводится уточнение оценки (1) для произвольных номеров l. Устанавливается также аналогичная оценка для спектра дискретного преобразования Фурье—Хартли (ДПФХ), являющегося вещественным аналогом ДПФ и в настоящее время широко используемого исследователями в цифровой обработке сигналов ([3]). В заключение указываются приложения полученных результатов к частному случаю сформулированной выше задачи.

2. Перейдем к формулировке полученных результатов. Пусть

$$y_l = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-ik\alpha}, \quad 1\leqslant l\leqslant N-1, \tag{2}$$

где $\alpha = \dfrac{2\pi l}{N}$, $x_{k+1}=x_k+\Delta_{k+1}$, $|\Delta_{k+1}|\leqslant\Delta$, $k=\overline{0, N-2}$. Следующая оценка снизу устанавливается непосредственно, если применить к сумме (2) преобразование Абеля и положить $\Delta_k=\Delta$, $k=\overline{1, N-1}$.

Лемма 1. *Для произвольного* l, $l\in\{1, \ldots, N-1\}$

$$\max_{\bar x\in X_\Delta} |y_l| \geqslant \frac{\Delta}{2\sin\dfrac{\pi l}{N}}.$$

Обозначим

$$z_l=\sum_{k=1}^{N-1}\Delta_k(e^{-ik\alpha}-1)$$

и будем считать N четным (для нечетного N отличия незначительны).

Лемма 2. *Пусть* l*—фиксировано,* $1\leqslant l\leqslant N-1$. *Тогда*

$$z_l=\begin{cases}\zeta_l-2\Delta_{\frac{N}{2}} & l\text{—нечетно,}\\ \zeta_l, & l\text{—четно,}\end{cases}$$

где

$$\zeta_l=\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left[\Delta_k(e^{-ik\alpha}-1)+\Delta_{N-k}(e^{ik\alpha}-1)\right].$$

На основании леммы 2 устанавливаются

Теорема 1. *Для произвольного* l, $l\in\{1, \ldots, N-1\}$

$$\max_{\bar x\in X_\Delta} \operatorname{Re} z_l=\Delta\cdot N.$$

Теорема 2. *Для прозвольного* l, $l\in\{1, \ldots, N-1\}$

$$\max_{\bar x\in X_\Delta} \operatorname{Im} z_l\leqslant \frac{2}{\pi}\Delta\cdot N$$

Из леммы 1 и теорем 1 и 2 следует

Теорема 3. *Имеют место следующие неравенства* ($1\leqslant l\leqslant N-1$):

$$\frac{\Delta}{2\sin\dfrac{\pi l}{N}}\leqslant\max_{\bar x\in X_\Delta}|y_l|\leqslant\frac{\Delta\sqrt{1+\dfrac{4}{\pi^2}}}{2\sin\dfrac{\pi l}{N}}. \tag{3}$$

3. Перейдем к случаю с применением ДПФХ, матрица которой имеет вид

$$\Phi=\left\|\frac{1}{N}\left|\cos\left(\frac{2\pi kl}{N}\right)+\sin\left(\frac{2\pi kl}{N}\right)\right|\right\|_k,\quad l=\overline{0,\ N-1}.$$

Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть* $\bar{x}\in X_\Delta$, Φ*—матрица ДПФХ порядка* $N\times N$, $\bar{y}=\Phi\bar{x}=(y_0,\ y_1,\ \dots,\ y_{N-1})$. *Тогда*

$$\max_{\bar{x}\in X_\Delta}|y_l|=\frac{\Delta\sqrt{2}/N}{\sin\frac{\pi l}{N}}\sum_{m=1}^{N-1}\left|\sin\left(\frac{m\pi l}{N}\right)\cdot\cos\left[(m-1)\frac{\pi l}{N}-\frac{\pi}{4}\right]\right|,\quad l=\overline{1,\ N-1}.$$

Следствие. В условиях теоремы 4

$$\max_{\bar{x}\in X_\Delta}|y_l|\leqslant\frac{\Delta}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi l}{N}},\quad l=\overline{1,\ N-1}. \tag{4}$$

4. Рассмотрим приложения оценок (3) и (4) к задаче сжатия информации посредством ДПФ и ДПФХ. В важном частном случае сформулированной в п. 1 задачи, когда процедура $\Psi S_m\bar{y}$ сводится к замене нулями компонент из некоторой, заранее очерченной области спектра, такой метод сжатия известен как зонное кодирование ([4]). Величина $k=N/m$ называется при этом коэффициентом сжатия информации, а задача заключается в отыскании оптимального способа зонного кодирования, т. е. такого, который гарантирует минимум ε_Ψ при заданном k. Следует подчеркнуть, что заменять нулями целесообразно те компоненты спектра, которые малы по абсолютной величине и, следовательно, вносят меньший вклад при восстановлении исходного вектора. Таким образом, оценки (3) и (4) позволяют сделать вывод о том, что оптимальным на классе X_Δ способом зонного кодирования с помощью ДПФ или ДПФХ является замена нулями центральных компонент вектора $\bar{y}$. Кроме того, в ([4]) на основании (1) оценивается значение максимума среднеквадратической ошибки ε_F на классе X_Δ при оптимальном зонном кодировании посредством ДПФ. Аналогично, используя (3), можно прийти к более точной оценке ε_F. Именно если Ψ есть матрица ДПФ или ДПФХ порядка $N\times N$ и

$$\varepsilon_\Psi=\sup_{\bar{x}\in X_\Delta}\rho(\bar{x},\ \Psi^{-1}\tilde{y}),$$

где вектор $\tilde{y}$ получается из вектора $\bar{y}=\Psi\bar{x}$ заменой нулями $2s+1$ центральных компонент ($s<N/2$, N—четно), то справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть* ρ*—среднеквадратическая метрика. Тогда*

$$\varepsilon_F\leqslant\Delta\sqrt{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}\right)\left[1+\frac{2N}{\pi}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi(s+1)}{N}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{N}\right)\right]},$$

$$\varepsilon_\Phi\leqslant\Delta\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{N}{\pi}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi(s+1)}{N}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{N}\right)}$$

(Оценка ε_k устанавливается на основании (4)).

В заключение автор выражает благодарность С. С. Агаяну за внимание к работе и полезные замечания.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ա. Ա. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ֆուրյեի դիսկրետ ձևափոխությունների սպեկտրների գնահատականներ

Աշխատանքում բերված են որոշակի դասի տվյալների Ֆուրյեի դիսկրետ ձևափոխության սպեկտրի գնահատականներ։ Բերված է նաև Ֆուրյեի դիսկրետ ձևափոխության իրական թվային անալոգ հանդիսացող Հարթլիի դիսկրետ ձևափոխության սպեկտրի գնահատական։ Նշված է ստացված արդյունքների կիրառությունը ինֆորմացիայի սեղմման խնդրում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. В. Ефимов*, Тезисы докл. Всесоюзн. симп. по теории аппроксимации функций в комплексной области. Уфа, 1976. [2] *А. В. Ефимов*, Кратки сообщ. Междунар. мат. конгресса, VII, секция 9, часть II, Варшава, 1983. [3] *Р. Н. Брейсуэлл*, ТИИЭР, т. 72 № 8 (1984). [4] *Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов*, Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. Наука, М., 1987.