ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVII 1988 5

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Шамоян, И. М. Гепоркян

Характеристика скорости убывания коэффициентов Фурье функций ограниченного вида и уточнение теоремы Р. Салинаса

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 8/VIII 1988)

1°. Пусть D—единичный круг на комплексной плоскости, Γ—его граница, $H^p(0<p\leqslant+\infty)$—класс Харди в D. Символом $\mathcal{N}$ обозначим множество всех голоморфных в D функций, имеющих там ограниченный вид, т. е. $f\in\mathcal{N}\Leftrightarrow f=\frac{h_1}{h_2}$, где $h_j\in H^\infty$, $j=1, 2$.

Если $f\in L^1(\Gamma)$, то через $\hat{f}(n)$, $n\in\mathbf{Z}$, будем обозначать коэффициенты Фурье функции f. Пусть $\alpha=\{\alpha_n\}_1^\infty$ последовательность монотонно растущих положительных чисел.

В этой заметке мы получим полную характеристику тех α, для которых возможна нетривиальная оценка

$$|\hat{f}(-n)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{\alpha_n},\ f\in\mathcal{N}\cap L^1(\Gamma),\ n=1, 2, \ldots \tag{1}$$

Для формулировки основного результата заметки введем также обозначение:

$$m_k=\sup_{n\geqslant1}\frac{n^k}{\alpha_n},\quad T(r)=\sup_{n\geqslant1}\frac{r^n}{m_n},\quad k=1, \ldots;\ r\geqslant0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть $\alpha=\{\alpha_n\}_1^\infty$—последовательность монотонно растущих положительных чисел. Тогда, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:*

а)
$$\int^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^{3/2}}\,dr=+\infty; \tag{3}$$

б)
$$\sum_1^\infty\frac{1}{\sqrt[2n]{m_n}}=+\infty, \tag{4}$$

то для каждой $f\in L^1(\Gamma)\cap\mathcal{N}$ из условия (1) следует, что $\hat{f}(-n)=0$, $n=1, 2, \ldots$.

И обратно, если α удовлетворяет условию

$$\log\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\gamma_n\log\left(1+\frac{1}{n}\right),\ n=1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где γ_n—монотонно растущая положительная последовательность, и если интеграл (3) или ряд (4) сходятся, то можно построить

функцию $f\in\mathcal{N}\cap L^1(\Gamma)$, *для которой коэффициенты* $\hat{f}(-n)$ *удовлетворяют оценке* (1). *В то же время* $\hat{f}(-n)\neq 0$, $n=1, 2, \ldots$, *а ряд Фурье функции* f *имеет вид*

$$f(e^{i\theta})\sim\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ik\theta}. \tag{6}$$

Замечание 1. В том случае, когда последовательность $\alpha=\{\alpha_n\}_1^\infty$ растет достаточно регулярно, например, удовлетворяет условию (5), утверждение теоремы 1 можно выразить непосредственно в терминах $\alpha=\{\alpha_n\}_1$. А именно:

Теорема 1[1]. *Пусть* $\alpha=\{\alpha_n\}_1$ *удовлетворяет условию* (5). *Тогда для того, чтобы из* (1) *следовало* $\hat{f}(-n)=0$, $n=1, 2, \ldots$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_1^\infty \frac{\log\alpha_n}{n^{3/2}}=+\infty. \tag{7}$$

При этом, если последний ряд сходится, то можно построить функцию $f\in\mathcal{N}\cap L^1(\Gamma)$, *для которой* $\hat{f}(-n)$ *удовлетворяет оценке* (1), $f(-n)\neq 0$, $n=1, 2, \ldots$, *а ряд Фурье функции* f *имеет вид* (6).

Замечание 2. В том частном случае, когда $\alpha_n=\exp\{A\sqrt{n}\}$, $n=1, 2, \ldots$, $A>0$, Г. Шапиро в ([1]) установил, что из (1) следует $f(-n)=0$, $n=1, 2, \ldots$, а при $\alpha_n=\exp\{n^\alpha\}$, $n=1, 2, \ldots$, $0<\alpha<\frac{1}{2}$ он доказал, что существует функция $f\in\mathcal{N}\cap L^1(\Gamma)$, для которой выполняется (1) и $f(-n)\neq 0$, $n=1, 2, \ldots$.

Доказательство теоремы 1 основано на ряде вспомогательных утверждений. Пусть $\beta>0$, $H(D)$—множество всех голоморфных в D функций, введем в рассмотрение банахово пространство голоморфных в D функций:

$$A_\beta=\left\{f\in H(D):|f(z)|\leqslant\frac{C_f}{(1-|z|)^\beta},\ z\in D\right\},$$

$\|f\|_{A_\beta}=\sup\limits_{z\in D}|f(z)|(1-|z|)^\beta$, положим $A_\infty=\bigcup\limits_{\beta>0}A_\beta$. Введем в A_∞ топологию индуктивного предела банаховых пространств A_β.

Относительно этой топологии A_∞ превращается в топологическую алгебру. Если $f\in A_\beta$, то через E_α $(\alpha\geqslant\beta)$ обозначим замыкание множества $\mathcal{P}\cdot f$ в пространстве A_α, $E(f)\overset{\text{def}}{=}E_\alpha(f)$, здесь $\mathcal{P}$—множество всех многочленов от z. Следующая лемма непосредственно следует из представлений Шварца (см. ([2])). Пусть $f\in H(D)$, $Df(z)=zf'(z)$, $z\in D$, $D^nf=D^{n-1}(Df)$.

Лемма 1. *Пусть* $f\in A_\infty$, $f(z)\neq 0$, $z\in D$, *тогда для любого натурального* n *справедливо представление*

$$D^nf(z)=\psi_n(z)f(z),\ z\in D,\ \text{где}$$

$\psi_n(z)\in H(D)$ *и удовлетворяет оценке*

$$|\psi_n(z)| \leqslant \frac{C_f(n)}{(1-|z|)^{2n}} \log^n \frac{1}{1-|z|}, \quad z \in D, \quad \left(|z| \geqslant \frac{1}{2}\right).$$

Лемма 2. *Пусть* $g(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_n}{\zeta^n}$, $\zeta \in C^1 \setminus D$. *Если* $\lim_{k \to +\infty} C_k k^n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, *то по формуле*

$$\Phi_g(f) = \lim_{\rho \to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi}) g(e^{i\varphi}) d\varphi, \quad f \in A_\infty \tag{8}$$

порождается линейный непрерывный функционал на A_∞.

Следующее утверждение следует из леммы 1.

Лемма 3. *Если* $f \in A_\beta$, $f(z) \neq 0$, $z \in D$, *то функция* $D^n f$ *принадлежит подпространству* $E_{2\beta+\varepsilon}(f)$ *для любого* $\varepsilon > 0$, $n = 0, 1, \ldots$.

Лемма 4. *Пусть* $z = \{z_n\}$ *удовлетворяет условию*

$$\int^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{3/2}} dr < +\infty, \tag{9}$$

где $T(r)$ *определяется по формуле* (2). *Тогда существует целая функция* G *порядка* $\frac{1}{2}$ *и нормального типа, для которой*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |G(n)| < +\infty, \quad |G(x)| \leqslant \frac{\text{const}}{T^2(x)}, \quad x > 0.$$

Наметим ход доказательства теоремы 1.

Пусть $f \in A^\infty$, тогда хорошо известно, что f допускает представление

$$f(z) = \frac{B(z) S_1(z) Q(z)}{S_2(z)}, \quad z \in D$$

где B—произведение Бляшке, S_j—сингулярная внутренняя функция ($j = 1, 2$), Q—внешняя функция.

Поскольку $f \in L^1(\Gamma)$, то нетрудно заметить, что функция $\psi \overset{\text{def}}{=} BS_1Q = f \cdot S_2$ принадлежит классу H^1, поэтому

$$\int_\Gamma \zeta^n f(\zeta) S_2(\zeta) |d\zeta| = 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Следовательно, если ряд Фурье функции f имеет $f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\varphi}$, то, исходя из последнего равенства и учитывая условие (3), легко видеть, что функция $g(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \zeta^{-n}$, $\zeta \in C^1 \setminus D$, по формуле (8) порождает линейный непрерывный функционал Φ_g на A_∞, при этом $\Phi_g \perp E(S_2)$

Применяя леммы 2 и 3, получим $\Phi_g \perp D^n S_1$, $d = 0, 1, \ldots$. Используя это и условие (3), отсюда выводим $c_k = 0$, $k = -1, -2, \ldots$. Для установления обратного утверждения воспользуемся леммой 4 и пос-

троим функцию $f(\zeta)=\sum_{1}^{\infty} G(n)\zeta^{-n}$, $|\zeta|\geqslant 1$, здесь G — построенная в лемме 4 целая функция. Исходя из теоремы Вигерта — Ло (см. ([3])) заключаем, что f имеет аналитическое продолжение в $C^1\setminus\{1\}$. Учитывая оценки, полученные в лемме 4, устанавливаем, что указанное продолжение имеет ограниченный вид в D и удовлетворяет всем условиям теоремы 1.

2°. Прежде чем привести применение теоремы 1 к подклассам функций из $\mathcal{N}$ с бесконечно дифференцируемыми граничными значениями, введем некоторые обозначения. Через $\mathcal{N}^+$ обозначим известный подкласс класса $\mathcal{N}$: $f\in\mathcal{N}^+ \Leftrightarrow$

$$\lim_{\rho\to 1-0}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi=\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|f(e^{i\varphi})|d\varphi.$$

С последовательностью положительных чисел $M=\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ свяжем функцию Островского $T(r)=\sup_{k\geqslant 1}\frac{r^k}{M_k}$ $(r\geqslant 0)$ и обозначим через $C_N^{\infty}(M)$ класс функций $f\in\mathcal{N}$, граничное значение которых на Γ удовлетворяет оценке

$$|f^{(k)}(e^{i\theta})|\leqslant A_f^k M_k,\quad k=0,1,\ldots, \tag{11}$$

где A_f положительное число, зависящее только от f. Исходя из элементарных свойств функций класса $\mathcal{N}$, нетрудно построить функцию $f\in\mathcal{N}$, граничное значение которой удовлетворяет условию $f\in C(\Gamma)$, в то же время $f\notin\mathcal{N}^+$. Естественно возникает вопрос о полной характеристике тех $M=\{M_k\}_1^{\infty}$, для которых из условия (11) следовало $f\in\mathcal{N}^+$ или, что то же самое, чтобы из (11) следовала оценка

$$|f^{(k)}(z)|\leqslant A_f^k M_k,\ |z|\leqslant 1. \tag{12}$$

Справедлива

Теорема 3. *Пусть $M=\{M_k\}_1^{\infty}$ — последовательность положительных чисел. Тогда*

1. *Следующие утверждения равносильны:*

а) *Из* (11) *следует оценка* (12);

б)
$$\int^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^{3/2}}\,dr=+\infty. \tag{13}$$

2. *Если последний интеграл сходится, то можно построить функцию $f\in C_N^{\infty}(M)$ такую, что $f\notin\mathcal{N}^+$ и, следовательно:*

$$f\notin H^p,\quad (p>0).$$

Из этой теоремы следует следующее уточнение теоремы Р. Салинаса (см. ([4])).

Определение. *Скажем, что класс $C_N^{\infty}(M)$ является квазианалитическим, если из условия $f\in C_N^{\infty}(M)$, $f^{(k)}(\zeta_0)=0$, $k=0,1,\ldots$, при некотором $\zeta_0\in\Gamma$, следует, что*

$$f(\zeta)=0, \quad \zeta\in\Gamma.$$

Теорема 4. *Следующие утверждения равносильны:*

а) *класс* $C_{\omega}(M)$ *квазианалитический;*

б) $$\int^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{3/2}}\, dr = +\infty.$$

При этом, если последний интеграл сходится, то можно построить функцию $f\in C_{\omega}(M)$ *такую, что* $f^{(k)}(\zeta_0)=0$, $k=0, 1, \ldots$ *при некотором* $\zeta_0\in\Gamma$, *в то же время* $f\notin A^{++}$.

Институт математики Академии наук
Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ, Ի. Մ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների Ֆուրյեի գործակիցների նվազման արագության բնութագրումը և Ի. Սալինասի թեորեմի ճշգրտումը

Հոդվածում ստացվել է շրջանում անալիտիկ սահմանափակ տեսքի և շրջանագծի վրա հանրագումարելի ֆունկցիաների բացասական ինդեքսներով Ֆուրյեի գործակիցների նվազման արագության բնութագիրը։ Դրա հիման վրա տրվել է քվազիանալիտիկ դասերի վերաբերյալ Ի. Սալինասի հայտնի թեորեմի ճշգրտումը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. Shapiro*, в кн. Современные проблемы теории аналитических функций, Наука, с. 326—331, 1966. [2] *К. Гофман*, Банаховы пространства аналитических функций. Мир, М., 1963. [3] *Л. Бибербах*, Аналитическое продолжение, Наука, М., 1967. [4] *R. B. Salinas*, Rev. Acad. Ciencias, Madrid, v. 49, p. 331—368 (1955).