ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXVII 1988 5

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

Алгебры и клоны

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 20/IV 1988)

Пусть U—произвольное непустое множество, с каждым элементом ω которого связано некоторое натуральное число $n=|\omega|$, называемое арностью этого элемента $\omega\in U$. Если

$$T=\{|\omega|\,|\,\omega\in U\},$$

то множество U называется T-множеством ([1]).

Пусть Q—произвольное T-множество, где $T=N$, т. е. Q—произвольное N-множество. Подмножество всех n-арных элементов множества Q обозначим через Q_n. Такое множество Q называется клоном, если

а) для любых натуральных $n\geq 1$ и $m\geq 1$ определены операции

$$\mu_n^m: Q_n\times \underbrace{Q_m\times\ldots\times Q_m}_{n}\to Q_m$$

и нульарные операции, фиксирующие элементы $\delta_n^i\in Q_n$ для любого натурального $n\geq 1$ и для любого натурального $1\leq i\leq n$;

б) эти операции удовлетворяют следующим тождествам:

$$\mu_n^m(\mu_p^n(w, v_1, \ldots, v_p), u_1, \ldots, u_n)=$$

$$=\mu_p^m(w, \mu_n^m(v_1, u_1, \ldots, u_n), \ldots, \mu_n^m(v_p, u_1, \ldots, u_n));$$

$$\mu_n^m(\delta_n^i, u_1, \ldots, u_n)=u_i;$$

$$\mu_n^n(v, \delta_n^1, \ldots, \delta_n^n)=v.$$

Таким образом, все клоны образуют многообразие градуированных (многоосновных, многосортных) алгебр, общая теория которых развита в ([2]). Любое подмногообразие этого многообразия называется многообразием клонов. Здесь можно говорить и о свободных клонах.

Множество Q называется алгеброй над клоном Γ, если для любого $\gamma\in\Gamma$, $|\gamma|=n$, и для любых $a_1, \ldots, a_n\in Q$ определен элемент $\gamma(a_1, \ldots, a_n)\in Q$, причем справедливы условия:

$$\mu_n^m(\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)(a_1, \ldots, a_m)=\gamma[\gamma_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, \gamma_n(a_1, \ldots, a_m)],$$

$$\delta_n^i(a_1, \ldots, a_n)=a_i.$$

Множество Q называется клон-алгеброй (клоновой алгеброй), если оно является алгеброй над некоторым клоном Γ.

Пусть OpQ—клон всех операций множества Q. Каждый клоновый гомоморфизм $\varphi: \Gamma \to OpQ$ превращает множество Q в алгебру над клоном Γ и наоборот, если Q—алгебра над клоном Γ, тогда она определяет представление клона Γ в клоне всех операций множества Q.

Модуль или полигон естественным образом расширяются до алгебры над клоном (рассматривая при этом кольцо или моноид как унарную часть клона).

Если Q—алгебра над клоном Γ, то Q будем называть клоновой Γ-алгеброй. Для каждого фиксированного Γ имеем категорию всех клоновых Γ-алгебр, в которых гомоморфизмы—это отображения множеств, перестановочные с действием клона Γ:

$$\varphi\gamma(x_1, \ldots, x_n) = \gamma(\varphi x_1, \ldots, \varphi x_n).$$

Поэтому всевозможные клоновые Γ-алгебры (при фиксированном клоне Γ) составляют многообразие всех клоновых Γ-алгебр. Подмногообразие в многообразии всех клоновых Γ-алгебр называется многообразием клоновых Γ-алгебр.

Теорема 1. *Существует взаимно-однозначное соответствие между многообразиями клоновых Γ-алгебр и конгруэнциями клона Γ.*

Перейдем к описанию многообразий клоновых алгебр над разными клонами.

Пусть Q является алгеброй над клоном Γ; эту клон-алгебру здесь обозначим через (Q, Γ). Если (Q_1, Γ_1) и (Q_2, Γ_2)—две клон-алгебры, тогда гомоморфизм между ними определяется как пара $(\varphi, \bar{\psi})$, где $\bar{\psi}: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ является гомоморфизмом клонов и справедливо равенство

$$\varphi\omega(x_1, \ldots, x_n) = [\bar{\psi}\omega](\varphi x_1, \ldots, \varphi x_n)$$

для любого $\omega \in \Gamma_1$, $|\omega| = n$, и для любых $x_1, \ldots, x_n \in Q_1$ (ср. ([3]))

Теорема 2. *Многообразия клон-алгебр находятся во взаимно-однозначном соответствии с парами (ρ, ρ') вполне инвариантных конгруэнций $\rho' \subseteq \rho$ свободного клона $F(U)$, где U по каждому натуральному числу $n \in N$ содержит ровно счетное число n-арных элементов.*

Определим понятие насыщенного многообразия клон-алгебр. Гомоморфизм клон-алгебр $(\varphi, \bar{\psi}): (Q, \Gamma_1) \to (Q, \Gamma_2)$ с тождественным φ назовем правым гомоморфизмом. Многообразие $\mathfrak{M}$ клон-алгебр называется насыщенным, если из $(Q, \Gamma) \in \mathfrak{M}$ и из того, что (Q, Γ)—правый, эпиморфный образ некоторой клон-алгебры $(Q, \sum)$, следует и $(Q, \sum) \in \mathfrak{M}$. Нетрудно доказать, что $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда насыщено, когда отвечающая этому $\mathfrak{M}$ вполне инвариантная конгруэнция $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ имеет тривиальную конгруэнцию ρ_2.

Теорема 3. *Насыщенные многообразия клон-алгебр находятся во взаимно-однозначном соответствии с вполне инвариантными конгруэнциями свободного клона $F(U)$.*

Следствие. *Насыщенные многообразия клон-алгебр находятся во взаимно-однозначном соответствии с многообразиями клонов.*

Клоновый автомат (клон-автомат)—это трехосновная система (Q, Γ, Y), в которой Q и Y—произвольные множества, Γ—клон, причем для каждого n-арного элемента $\omega \in \Gamma$ и для любых $a_1, \ldots, a_n \in Q$ определены элементы $\omega(a_1, \ldots, a_n) \in Q$, $\omega*(a_1, \ldots, a_n) \in Y$ и справедливы следующие три тождества:

а) $\mu_n^m(\omega, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)(a_1, \ldots, a_m) = \omega(\gamma_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, \gamma_n(a_1, \ldots, a_m))$;

б) $\mu_n^m(\omega, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)*(a_1, \ldots, a_m) = \omega*(\gamma_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, \gamma_n(a_1, \ldots, a_m))$;

в) $\delta_m^i(a_1, \ldots, a_m) = a_i$.

Обычным образом определяются гомоморфизмы клоновых автоматов, и тогда возникает категория клоновых автоматов. Можно говорить и о категории клоновых автоматов при фиксированном клоне Γ.

Описываются многообразия в обеих категориях.

Ереванский государственный университет

ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Հանրահաշիվներ և կլոններ

Աշխատանքում ներմուծվում է կլոնային հանրահաշվի գաղափարը և նկարագրվում են կլոնային հանրահաշիվների բազմաձևությունները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. М. Мовсисян*, Введение в теорию алгебр со сверхтождествами. Изд-во Ереванского гос. ун-та, 1986. [2] *P. J. Higgins*, Math. Nachrichten, v. 27, № 1—2, p. 115—132 (1963). [3] *Ю. М. Мовсисян*, Мат. исследования АН МССР т. 9, № 1, с. 70—82 (1974)