ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXVII 1988 4

УДК 239. 374

МЕХАНИКА

М. А. Задоян

# Задачи малонапряженности составных тел

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 22/VI 1988)

Рассматривается пространственное малонапряженное состояние на крае контактной поверхности составного клиновидного тела со степенным упрочнением. Фундаментальное исследоване в этой области для линейно-упругих составных тел приведено в монографии [1]. Вопросы концентрации напряжений в угловой точке при степенном законе упрочнения впервые рассмотрены в [2,3]. В статьях [4,5] обсуждаются вопросы малонапряженности составных тел со степенным упрочнением.

1. Пусть два призматических тела из несжимаемых степенно упрочняющиеся материалов, соединенные по боковым поверхностям полным прилипанием и нагруженные непрерывно распределенными внешними силами в других боковых поверхностях, находятся в состоянии пространственного напряженного состояния. Выделим около края контактной поверхности призматический элемент и приведем цилиндрическую систему координат $r, \theta, z$. Величины в областях $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$, $-\beta \leqslant \theta \leqslant 0$ обозначим, соответственно, 1 и 2.

В каждой из этих областей имеем дифференциальные уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0;\\
&\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0;\\
&\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0;
\end{aligned} \tag{1}$$

соотношения между компонентами деформации, перемещения и напряжения

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r},$$

$$2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad 2\gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad \sigma_0 = k\varepsilon_0^m,$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta + 2k\varepsilon_0^{m-1}(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta), \quad \sigma_z = \sigma_\theta + 2k\varepsilon_0^{m-1}(\varepsilon_z - \varepsilon_\theta),$$

$$\tau_{ij} = 2k\varepsilon_0^{m-1}\gamma_{ij}, \quad \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0.$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+(\sigma_\theta-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_r)^2+6(\tau_{r\theta}^2+\tau_{\theta z}^2+\tau_{rz}^2)}; \tag{2}$$

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\varepsilon_r-\varepsilon_\theta)^2+(\varepsilon_\theta-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_r)^2+6(\gamma_{r\theta}^2+\gamma_{\theta z}^2+\gamma_{rz}^2)}.$$

Принимается, что степени упрочнения $m$ обоих материалов одинаковы, модули деформации $k$ различны.

2. Полагаем, что деформированное состояние элемента слагается из плоской деформации и деформации кручения. Такое деформированное состояние характеризуется отсутствием продольного удлинения элемента $\varepsilon_z=0$.

В каждой области ($i=1, 2$) решение при $\lambda\neq 1$ представим следующим образом:

$$\sigma_{ri}=\sigma_{\theta i}+4k_i\lambda r^{(\lambda-1)m}f_i'\chi_i,\quad \sigma_{zi}=\sigma_{\theta i}+2k_i\lambda r^{(\lambda-1)m}f_i'\chi_i,$$

$$\sigma_{\theta i}=-\frac{k_i}{(\lambda-1)m}r^{(\lambda-1)m}\{([f_i''+(1-\lambda^2)f_i]\chi_i)'+4\eta f_i'\chi_i\},$$

$$\tau_{r\theta i}=k_i r^{(\lambda-1)m}[f_i''+(1-\lambda^2)f_i]\chi_i,\quad \eta=\lambda[1+(\lambda-1)m], \tag{3}$$

$$\tau_{rzi}=k_i\lambda r^{(\lambda-1)m}\varphi_i\chi_i,\quad \tau_{\theta zi}=k_i r^{(\lambda-1)m}\varphi_i'\chi_i,$$

$$u_i=r^\lambda f_i',\quad v_i=(\lambda+1)r^\lambda f_i,\quad w_i=r^\lambda\varphi_i,$$

$$\chi_i=\left(\sqrt{[f_i''+(1-\lambda^2)f_i]^2+4\lambda^2 f_i'^2+\varphi_i'^2+\varphi_i^2}\right)^{m-1},\quad \lambda\neq 1$$

где $f_i=f_i(\lambda, \theta)$, $\varphi_i=(\lambda, \theta)$ искомые функции от $\theta$ и параметра $\lambda$. Приведенные выражения (3) компонентов напряжений и перемещения являются решением системы уравнений (1)—(2), если функции $f_i$ и $\varphi_i$ удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$([f_i''+(1-\lambda^2)f_i]\chi_i)''+4\eta(f_i'\chi_i)'-(\eta-\lambda)(\eta+1)[f_i''+(1-\lambda^2)f_i]\chi_i=0;$$

$$(\varphi_i'\chi_i)'+\eta\varphi_i\chi_i=0. \tag{4}$$

Для краевых условий первого рода на поверхностях $\theta=\alpha$ и $\theta=-\beta$ принимаем отсутствие внешних сил

$$([f_i''+(1-\lambda^2)f_i]\chi_i)'+4\eta f_i'\chi_i=0,$$

$$f_i''+(1-\lambda^2)f_i=0,\quad \varphi_i=0,\quad \theta=\alpha, -\beta \tag{5}$$

и условия на контактной поверхности

$$([f_1''+(1-\lambda^2)f_1]\chi_1)'+4\eta f_1'\chi_1=\gamma\{([f_2''+(1-\lambda^2)f_2]\chi_2)'+4\eta f_2'\chi_2\};$$

$$[f_1''+(1-\lambda^2)f_1]\chi_1=\gamma[f_2''+(1-\lambda^2)f_2]\chi_2,\quad \varphi_1'\chi_1=\gamma\varphi_2'\chi_2 \tag{6}$$

$$f_1=f_2,\quad f_1'=f_2',\quad \varphi_1=\varphi_2,\quad \gamma=k_2/k_1,\quad \theta=0$$

Система дифференциальных уравнений (4) с условиями (5)—(6) трехточечная задача на собственные значения для определения $f_i$, $\varphi_i$ и $\lambda$. Придавая различные числовые значения $\lambda$, из (4)—(6) численными способами определяются соотношения между параметрами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $m$. При условии $\lambda>1$ в пространстве этих параметров будем иметь область малонапряженности. Принимая $\lambda=\lambda_*<1$, находим гиперповерхности одинаковых степеней концентрации напряжений $F(\alpha, \beta, \gamma, m, \lambda_*)=0$.

При $\varphi\equiv0$ из (1)–(6) имеем случай плоской деформации [4], а при $f\equiv0$ получим случай кручения [5].

3. В случае $\lambda=1$, т. е. при конечных напряжениях, решение системы (1)–(2) можно представить в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{ri}=\sigma_{\theta i}+4A_i\psi_i\chi_i,\quad \sigma_{zi}=\sigma_{\theta i}+2A_i\psi_i\chi_i,\\
\sigma_{\theta i}=B_i-2A_i\int\limits_0^{\theta}(1+\psi_i')\chi_i d\theta,\quad \tau_{r\theta i}=A_i(1+\psi_i')\chi_i,\\
\tau_{rzi}=A_i\varphi_i\chi_i,\quad \tau_{\theta zi}=A_i\varphi_i'\chi_i,\quad A_i=k_iC|C|^{m-1},\\
u_i=Cr\psi_i,\quad v_i=-2Crf_i+Cr\ln r,\quad w_i=Cr\varphi_i,\\
\psi_i=f_i',\quad \chi_i=\sqrt{(1+\psi_i')^2+4\psi_i^2+\varphi_i'^2+\varphi_i^2},
\end{gathered}
\tag{7}
$$

где $B_i$ и $C$ – произвольные постоянные. Приведенные выражения компонентов напряжений и перемещений (7) будут решениями системы уравнений (1)–(2), если $\psi_i$ и $\varphi_i$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
\psi_i''=-4\psi_i-\frac{4(1-m)\psi_i(1+\psi_i')}{4\psi_i^2+\varphi_i^2+m[(1+\psi_i')^2+\varphi_i'^2]},\\
\varphi_i''=-\varphi_i-\frac{4(1-m)\psi_i\varphi_i}{4\psi_i^2+\varphi_i^2+m[(1+\psi_i')^2+\varphi_i'^2]}.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

В случае граничных условий первого рода однородные условия системы (8) будут:

$$\psi_i'=-1,\quad \varphi_i'=0,\qquad \theta=\alpha,\ -\beta; \tag{9}$$

на контактной поверхности имеем

$$
\begin{gathered}
(1+\psi_1')\chi_1=\gamma(1+\psi_2')\chi_2,\quad \psi_1=\psi_2,\\
\varphi_1'\chi_1=\gamma\varphi_2'\chi_2,\quad \varphi_1=\varphi_2,\quad \theta=0
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Из условий на поверхностях $\theta=\alpha$, 0, $-\beta$ для $\sigma_{\theta i}$ получим

$$\int\limits_0^{\alpha}(1+\psi_1')\chi_1 d\theta+\gamma\int\limits_{-\beta}^{0}(1+\psi_2')\chi_2 d\theta=0. \tag{11}$$

Система дифференциальных уравнений (8) с граничными условиями (9)–(11) определяет гиперповерхность $F(\alpha, \beta, \gamma, m)=0$ конечных напряжений, отделяющую зону малонапряженности от зоны сильной концентрации.

При $m=1$, т. е. для линейно-упругих материалов, задача распадается на две отдельные задачи—задачу плоской деформации и задачу кручения. В случае $\varphi_i=0$ т. е. при плоской деформации, получим уравнение

$$\psi_i''=-4\psi_i-\frac{4(1-m)\psi_i(1+\psi_i')}{4\psi_i^2+m(1+\psi_i')^2} \tag{12}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered}(1+\psi_1')\chi_1=\gamma(1+\psi_2')\chi,\quad \psi_1'(\alpha)=\psi_2'(-\beta)=-1,\\ \psi_1(0)=\psi_2(0),\quad \chi_i=\sqrt{(1+\psi_i')^2+4\psi_i^2}.\end{gathered} \tag{13}$$

Уравнение (12) с условиями (13) определяет поверхность $F(\alpha, \beta, \gamma, m)=0$ малонапряженности при плоской деформации. При $m=1$ из (12)—(13) будем иметь

$$\begin{gathered}F=(\gamma^2-\gamma+1)\cos2\alpha\cos^2\beta+(\gamma-1)\cos^2\beta-\gamma(\gamma-1)\cos2\alpha-\\ -\gamma\sin2\alpha\sin2\beta+(\alpha+\gamma\beta)(\sin2\alpha\cos2\beta+\gamma\cos2\alpha\sin2\beta)-\gamma=0.\end{gathered} \tag{14}$$

Уравнение (14) совпадает с соответствующим уравнением К. С. Чобаняна ([1]), если в нем положить коэффициенты Пуассона равными 1/2.

4. Когда элемент края контактной поверхности совместно испытывает плоскую деформацию, деформацию кручения и продольное удлинение, конечное напряженно-деформированное состояние можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}\sigma_{ri}=\sigma_{0i}+4A_i\psi_i\chi_i,\quad \sigma_{zi}=2A_i\left(\psi_i+\frac{\sqrt{3}}{2}p\right)\chi_i,\\ \sigma_{\theta i}=B_i-2A_i\int\limits_0^{0}(1+\psi_i')\chi_i d\theta,\quad \tau_{r\theta i}=A_i(1+\psi_i')\chi_i,\\ \tau_{rzi}=A_i\varphi_i\chi_i,\quad \tau_{\theta zi}=A_i\varphi_i'\chi_i,\\ \chi_i=(\sqrt{(1+\psi_i')^2+4\psi_i^2+\varphi_i'^2+\varphi_i^2+p^2})^{m-1},\\ u_i=Cr\psi_i-\frac{Cpr}{2\sqrt{3}},\quad v_i=-2Cf_i+Cr\ln r,\\ w_i=Cr\varphi_i+\frac{Cpz}{\sqrt{3}},\quad \psi_i=f_i',\end{gathered} \tag{15}$$

где $p$—постоянная, характеризующая деформацию удлинения элемента.

Компоненты напряжений и перемещений (15) будут решением системы уравнений (1)—(2), если функции $\psi_i$ и $\varphi_i$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\psi_i''=-4\psi_i-\frac{4(1-m)\psi_i(1+\psi_i')}{p^2+4\psi_i^2+\varphi_i^2+m[(1+\psi_i')^2+\varphi_i'^2]}; \tag{16}$$

$$\varphi_i'' = -\varphi_i - \frac{4(1-m)\psi_i\varphi_i'}{p^2+4\psi_i'^2+\varphi_i'^2+m[(1+\psi_i')^2+\varphi_i'^2]}.$$

Граничные условия для (16) остаются прежние —(9)—(11). Система уравнений (16) с условиями (9)—(11) определяет предельную поверхность $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, m, p)=0$, отделяющую область малонапряженности от области сильной концентрации напряжений. Исходя из соображений непрерывности, из (16) и (9)—(11) можно заключить, что при изменении $p$ от 0 до $\infty$ положение предельной поверхности $\Phi=0$ меняется от $F(\alpha, \beta, \gamma, m)=0$ до $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)=0$. В частности, при $\psi_i=0$, т. е. при кручении, из (16) получается $\varphi_i=D_i\cos\theta+F_i\sin\theta$. Используя граничные условия, из (9)—(11) для $\varphi_i$, будем иметь

$$\frac{\mathrm{tg}\,\gamma\,|\cos\alpha|^{1-m}}{(\sqrt{1+p^2\cos^2\alpha})^{1-m}} + \frac{\gamma\,\mathrm{tg}\,\beta\,|\cos\beta|^{1-m}}{(\sqrt{1+p^2\cos^2\beta})^{1-m}} = 0. \qquad (17)$$

При $p=0$ из (17) следует уравнение, полученное в ([5]), а при $p\to\infty$ приходим к соответствующему уравнению для линейно-упругого тела ([1]).

Институт механики Академии наук
Армянской ССР

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

## Բաղադրյալ մարմինների թերլարվածության խնդիրները

*Նախորդ հաղորդումներում ([1,2]) քննարկվել են աստիճանային ամրապնդումով բաղադրյալ մարմնի միացման մակերևույթի եզրում թերլարվածության հարցերը հարթ դեֆորմացիայի և ոլորման պայմանների առկայությամբ։ Այստեղ ուսումնասիրվում է ավելի ընդհանուր խնդիր, երբ աստիճանային ամրապնդումով բաղադրյալ մարմնի միացման մակերևույթին կից էլեմենտը գտնվում է հարթ և ոլորման դեֆորմացիաների համատեղ ազդեցությունների պայմաններում։ Խնդիրը հանգում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների (4-րդ) համակարգի ինտեգրմանը (5)—(6) եզրային պայմանների դեպքում, որոնք բխում են արտաքին մակերևույթների արտաքին ուժերից ազատ լինելու և միացման մակերևույթում լարումների և տեղափոխումների անընդհատության պայմաններից։*

*Հավասարումների (8) համակարգը՝ (9)—(11) պայմաններով սկզբունքորեն որոշում է ֆիզիկական և երկրաչափական պարամետրերի տարածության մեջ թերլարվածությունը։ Այս ուսումնասիրությունից, որպես մասնավոր դեպքեր, ստացվում են ([1,2]) հոդվածներում բերված արդյունքները։*

*Հոդվածում քննարկվում է նաև այն դեպքը, երբ միացման եզրում գտնվող էլեմենտը ենթարկվում է նաև առանցքային ձգման։*

### ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. С. Чобанян.* Напряжения в составных упругих телах. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1987. [2] *Г. П. Черепанов,* ПММ, т. 31, вып. 3 (1967). [3] *Дж. Райс,* Разрушение, Мир, М., 1975, т. 2. [4] *М. А. Задоян,* ДАН АрмССР, т. 74, № 1 (1982). [5] *М. А. Задоян,* ДАН СССР, т. 296, № 2 (1987).