ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVII 1988 4

УДК 539.375:517.946

МЕХАНИКА

С. А. Назаров

Поведение на бесконечности решений систем Ламе и Стокса в секторе слоя

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 21/VI 1988)

1°. *Постановка задач.* Пусть Ω—область в R^3, совпадающая вне достаточно большого шара B с сектором слоя $G=K\times(-1/2, 1/2)$, где $K=\{y:|\varphi|<\alpha\}$, $\alpha\in(0, \pi]$; $x=(y, z)$, $y=(x_1, x_2)$—(безразмерные) декартовы, а (r, φ, z)—цилиндрические координаты. Рассмотрим систему уравнений

$$-\nabla\cdot\nabla u+\nabla p=f,\ \nabla\cdot u=(1-2\nu)p \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

в которой $u=(u_1, u_2, u_3)$ и $\nu\in[0, 1/2]$. Если $\nu=1/2$, то (1)—система Стокса, p—давление, u—вектор скоростей; на $\partial\Omega$ поставим следующие условия:

$$u=\varphi \text{ на } \partial\Omega. \tag{2}$$

Если $\nu<1/2$, то уравнения (1) эквивалентны системе Ламе. Тогда u—вектор смещений, p—величина, пропорциональная среднему давлению, ν—коэффициент Пуассона. Примем краевые условия

$$u=\varphi \text{ на } \Gamma;\ \sigma^{(n)}(u)=\psi \text{ на } \partial\Omega\setminus\Gamma, \tag{3}$$

где ψ и φ—внешние нагрузки и смещения, $\sigma^{(n)}(u)$—нормальные напряжения, $\Gamma\setminus B=\{x:\varphi=\pm\alpha, |z|<1/2\}\setminus B$ (т. е. боковая поверхность сектора слоя жестко защемлена).

В следующих разделах строится асимптотика решений задач (1), (2) и (1), (3). Для упрощения формул предполагается, что f, φ и ψ—финитные вектор-функции.

2°. *Система Стокса.* Определим по функции $y\to q(y)$ вектор $U(q; x)=(1/8(4z^2-1)\nabla' q(y), 0)$ (штрих оставляет в векторе лишь первые две компоненты). Гармонические в K функции $r^{-\lambda_j}\cos(\lambda_j(\varphi-\alpha))$, подчиненные однородным условиям Неймана на ∂K, обозначим q_j; здесь $j=0, \pm1, \ldots$, $\lambda_j=\pi j/2\alpha$.

Предложение 1. *Обладающее конечным интегралом Дирихле решение задачи* (1), (2) $\nu=1/2$ *допускает представление*

$$u(x)=C_1U(q_1; x)+o(r^{-\gamma-1}(1+r\exp(\delta r(|\varphi|-\alpha)))),$$
$$p(x)=\text{const}+C_1q_1(x)+o(r^{-\gamma}), \tag{4}$$

где C_1—зависящая от f, φ постоянная, $\gamma<\min\{\lambda_1+1, \lambda_2\}$, $\delta>0$.

Алгорифм построения формальных асимптотических разложений при $r\to\infty$ является модификацией известных итерационных процессов конструирования асимптотики решений эллиптических краевых задач в тонких областях (см. ([1-6]) и др.). С его помощью выводится так называемая предельная задача на сечении K сектора слоя G. В рассматриваемом случае это—задача Неймана для оператора Лапласа (ср. с уравнением Рейнольдса). Вблизи боковой поверхности G возникает экспоненциально затухающий пограничный слой (из-за него оценка в (4) содержит экспоненту).

Введем декартовы координаты $\eta^\pm$ такие, что $\eta_3^\pm = z$, ось $0\eta_2^\pm$ совпадает с лучом $\{\varphi=\pm\alpha\}$, а ось $0\eta_1^\pm$ направлена вовнутрь G. Пусть ζ_3—гармоническая в $\Pi=\{\eta':|\eta_2|<1/2, \eta_1>0\}$ функция, равная нулю на боковых сторонах полуполосы Π и $1/8(1-4\eta_2^2)$ на ее торце. Положим $I=\|\nabla'\zeta_3; L_2(\Pi)\|^2$ и обозначим через ζ', p решение плоской задачи Стокса

$$-\nabla'\cdot\nabla'\zeta'+\nabla' p=0,\quad \nabla'\cdot\zeta'=\zeta_3 \text{ в } \Pi; \tag{5}$$

$\zeta'=0$ при $\eta_2=\pm 1/2$, $\eta_1>0$; $\zeta'=(0, I)$ при $\eta_1=0$, $|\eta_2|<1/2$. Можно проверить, что $|\zeta'(\eta')|$, $|p(\eta')|=o(\exp(-\delta\eta_1))$, $\eta_1\to+\infty$.

Предложение 2. *Для решения* (4) *верны формулы*

$$u(x)=\sum_{j=1}^{n} C_j\{U(P_j; x)+\sum_{\pm}\chi(\eta_1^\pm)\zeta^{(j)}(\eta^\pm)\}+o(r^{-\lambda_{n+1}-3}),\ p(x)=$$

$$=\text{const}+\sum_{j=1}^{n} C_j\{P_j(y)+\sum_{\pm}\chi(\eta_1^\pm)p^{(j)}(\eta^\pm)\}+o(r^{-\lambda_{n+1}-2}),\quad r\to\infty,$$

в которых обозначения аналогичны использованным ранее; кроме того, $n=1+[4\alpha/\pi]$, $P_j=q_j-I^{-1}(1+\lambda_j)r^{-\lambda_j-1}\sin(\lambda_j(\varphi-\alpha))$,

$$\zeta^{(j)}(\eta)=\lambda_j\eta_1^{-\lambda_j}r^{-3}((1+\lambda_j)\zeta'(\eta'), -\eta_3\zeta_3(\eta')),\ p^{(j)}(\eta)=\lambda_j(1+\lambda_j)\eta_1^{-\lambda_j}r^{-2}p(\eta');$$

$C_0^\infty[-1, 1]\ni\chi$*—срезка, равная единице вблизи нуля.*

3°. *Система Ламе.* Решение задачи (1), (2) при $\nu<1/2$ экспоненциально исчезает на бесконечности (напомним, что правые части в (1)—(3) финитны). Рассмотрим задачу (1), (3). Предельной для нее служит совокупность краевых задач

$$(\nabla'\cdot\nabla')w=0 \text{ в } K,\ w=\partial w/\partial\varphi=0 \text{ на } \partial K\setminus 0; \tag{6}$$

$$\nabla'\cdot\nabla' v+(1+\nu)(1-\nu)^{-1}\nabla'\nabla'\cdot \mathrm{v}=0 \text{ в } K,\ v=0 \text{ на } \partial K\setminus 0. \tag{7}$$

По двумерному вектору v и скаляру w, зависящим от переменных $y\in K$, построим трехмерные векторы

$$V(v; x)=(v(y),\ \nu(\nu-1)^{-1}z\nabla'\cdot v(y)),$$

$$W(w; x)=([1/24(1-\nu)^{-1}(4(2-\nu)z^2+6(6-\nu))z\nabla'\cdot\nabla'-z]\nabla' w(y),$$

$$w(y)+1/24\nu(\nu-1)^{-1}(12z^2-1)\nabla'\cdot\nabla' w(y)). \tag{8}$$

Вне конической окрестности боковой поверхности цилиндра G асимптотика решения u задачи (1), (3) представляется в виде линейной комбинации векторов (8), определенных по однородным решениям краевых задач (6), (7). Эти решения $r^{-\lambda}Z(\varphi, \ln r)$ находятся из некоторых спектральных задач на дуге $(-\alpha, \alpha)$; λ—собственное число, а коэффициенты полинома $l\to Z(\varphi, l)$ суть собственные и присоединенные векторы. Известны (см., например ([7])) трансцендентные уравнения, которым удовлетворяют указанные собственные значения.

Пусть раствор 2α угла K таков, что первые собственные числа λ_w и λ_v из полуплоскостей $\{\operatorname{Re}\lambda<1\}$ и $\{\operatorname{Re}\lambda<0\}$ простые. Отвечающие им решения задач (6) обозначим через $w^0(y)=r^{\lambda_w}\Phi^w(\varphi)$ и $v^0(y)=r^{\lambda_v}\Phi^v(\varphi)$, а вещественные части следующих корней — через γ_w и γ_v.

Вблизи боковой поверхности G возникает пограничный слой, который описывается при помощи специальных решений задач о плоской и антиплоской деформации полуполосы П. Его конструкция весьма громоздкая и здесь опускается. Отметим лишь, что погранслой вычисляется по тем же формулам, что и в асимптотике по ε решения задачи в цилиндре малой высоты. Упомянутые формулы приведены, например, в § 5.6 ([8]).

Предложение 3. *Обладающее конечной упругой энергией решение задачи* (1), (3) *при* $\nu<1/2$ *имеет асимптотику* $u(x)=C_1V(v^0;x)+C_2W(w^0;x)+(1,1,r)o(r^{-\gamma})$, $r\to\infty$, *где* $\gamma<\min\{\gamma_w-1,\gamma_v,\lambda_w,\lambda_v+1\}$.

Отметим, что при помощи обсуждающейся модификации итерационных процессов ([1-6]) можно построить полные асимптотические разложения обеих рассмотренных задач.

4°. *Краевые задачи в слое.* Если K — полный угол $R^2\setminus 0$ (Ω вне B совпадает со слоем единичной толщины), то пограничные слои отсутствуют, а коэффициенты асимптотических рядов выражаются через производные фундаментальных решений $Y(y)=-(2\pi)^{-1}\ln|y|$, $(8\pi)^{-1}|y|^2\ln|y|$ операторов $\nabla'\cdot\nabla'$, $(\nabla'\cdot\nabla')^2$ и через тензор Сомильяны T, отвечающий системе Ламе в (7). Сформулируем более простое утверждение относительно решения системы Стокса.

Предложение 4. *Для решения задачи* (1), (2) *при* $\nu=1/2$ *справедливо асимптотическое представление*

$$(u(x),p(x))=(0,\text{const})+\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}C_{j,n}(U(X_{j,n}(\nabla')Y;x),$$

$$X_{j,n}(\nabla')Y(y))+(1,1,1,r)o(r^{-N-1}),\ r\to\infty,$$

где $C_{j,n}$ — некоторые постоянные, $y\to X_{j,n}(y)$, $j=1,2$ — гармонические полиномы степени n, N — произвольное натуральное число.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Ս. Ա. ՆԱԶԱՐՈՎ

Շերտի հատվածում Լամեի և Ստոքսի համակարգերի լուծումների վարքը անվերջությունում

Գտնված են դեպի անվերջություն ելք ունեցող շերտի կամ նրա մի մասի տեսքով եռաչափ տիրույթներում առաձգականության տեսության և հիդրոմեխանիկայի խնդիրների լուծումների ասիմպտոտիկ ներկայացումները անվերջությունում։

Ասիմպտոտիկ շարքերը պարունակում են անկյունում սահմանային խնդիրների հատուկ համասեռ լուծումներ։ Լամեի համակարգի համար դրանք խնդիրներ են Կիրխհոֆի սալի ծռման և հարթ լարվածային վիճակի մասին, իսկ Ստոքսի համակարգի համար դա Նեյմանի խնդիր է Լապլասի օպերատորի համար (Ռեյնոլդսի հավասարումներ)։

Շերտի հատվածի կողմնային մակերևույթի մոտակայքում առաջանում է էքսպոնենցիալ սահմանային շերտ, որը նկարագրվում է կիսաշերտում հարթ խնդիրների լուծումներով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Л. Гольденвейзер*, Прикл. математика и механика, т. 27, № 6, с. 1057—1074 (1962). [2] *М. Г. Джавадов*, Дифференц. уравнения, т. 5, № 10, с. 1901—1909 (1968). [3] *Н. Е. Зино, Э. А. Тропп*, Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости, Изд. ЛГУ, 1978. [4] *С. А. Назаров*, Вестник ЛГУ, № 7, с. 65—68, 1982. [5] *В. В. Кучеренко, В. А. Попов*, ДАН СССР, т. 274, № 1, с. 58—61 (1981). [6] *С. И. Леора, С. А. Назаров, А. В. Проскура*, Журн. вычислительной математики и мат. физики, т. 26, № 7, с. 1032—1048 (1986). [7] *В. З. Партон, П. И. Перлин*, Методы математической теории упругости, Наука, М., 1981. [8] *С. А. Назаров*, Введение в асимптотические методы теории упругости, Изд. ЛГУ, 1983.