ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXVII 1988 4

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

А. В. Абрамян

О нулях ядра Сегё

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 27/VII 1988)

Пусть многочлены $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормальны на единичной окружности $T=\{z;\ |z|=1\}$ относительно распределения $d\mu(\theta)$, где $\mu(\theta)$ — ограниченная неубывающая функция с бесконечным множеством точек роста на отрезке $[0, 2\pi]$.

Зафиксируем $\zeta\in T$ и рассмотрим ядро Сегё

$$K_n(z,\zeta)=\sum_{\nu=0}^{n}\overline{\varphi_\nu(\zeta)}\,\varphi_\nu(z).$$

При всяком $n>0$ нули многочлена $\varphi_n(z)$ лежат в круге $U=\{z;\ |z|<1\}$ (см. ([1]), с. 14), следовательно, многочлен $K_n(z,\zeta)$ имеет точную степень n.

Известно (см. ([2])), что все нули $K_n(z,\zeta)$ лежат на окружности T и вместе с точкой ζ являются точками сосредоточения $n+1$-точечной меры на окружности, которая оставляет без изменения моменты $c_0, c_{\pm 1}, \ldots, c_{\pm n}$ меры μ, точнее:

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}d\mu=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}d\sigma_n,\quad |k|=0, 1, \ldots n, \tag{1}$$

где

$$d\sigma_n=\sum_{\nu=0}^{n}m_{\nu n}\delta(z-\zeta_{\nu n});$$

$$\zeta_{0n}=\zeta,\ \zeta_{\nu n},\ \nu=1, 2, \ldots, n \text{ нули } K_n(z,\zeta);$$

$$m_{\nu n}=K_n^{-1}(\zeta_{\nu n},\zeta_{\nu n}),\ \delta\text{ — мера Дирака.}$$

Обозначим через $C(T)$ пространство непрерывных на T комплексных функций. Если γ, γ_n $(n=1, 2, \ldots)$ — конечные положительные меры на T, то символом $d\gamma_n\xrightarrow{*}d\gamma$ будем обозначать слабую сходимость: для $\forall f\in C(T)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_T f\,d\gamma_n=\int_T f\,d\gamma.$$

Пусть $d\mu=p(\theta)d\theta+d\mu_s$ — разложение Лебега меры μ, где $p(\theta)\geq 0$ суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция, а $d\mu_s$ — сингулярная компонента μ. Справедлива следующая

Теорема 1. *Если $p(\theta)>0$ для почти всех $\theta\in[0, 2\pi]$, то для $\forall f\in C(T)$ имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\zeta_{1n})+\ldots+f(\zeta_{nn})}{n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta, \tag{2}$$

т. е. $d\mu_n\xrightarrow{*}\frac{d\theta}{2\pi}$, $\quad d\mu_n=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\delta(z-\zeta_{\nu n}),\ \zeta_{0n}=\zeta.$

Прежде чем доказать теорему 1, сформулируем в виде леммы некоторые необходимые нам известные результаты (см. [3]).

Лемма 1. *Если $p(\theta)>0$ почти всюду на отрезке $[0, 2\pi]$, то*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}|\varphi_n(e^{i\theta})|^2 d\mu_1=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left|p(\theta)\frac{K_n(e^{i\theta}, e^{i\theta})}{n+1}-1\right|d\theta=0.$$

Доказательство теоремы. Достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}d\mu_n=\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}d\theta,\ |k|=0, 1, \ldots \tag{3}$$

Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}d\mu_n=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\zeta_{\nu n}^{k}\frac{m_{\nu n}}{m_{\nu n}}=\frac{1}{n+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}\sum_{\nu=0}^{n}|\varphi_\nu(e^{i\theta})|^2 d\sigma_n=$$

$$=\frac{1}{n+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}K_{n-|k|}(e^{i\theta}, e^{i\theta})d\mu+\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=n-|k|-1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}|\varphi_\nu(e^{i\theta})|^2 d\sigma_n. \tag{4}$$

Мы воспользовались равенством (1). Далее

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=n-|k|+1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}\right|\varphi_\nu(e^{i\theta})|^2 d\sigma_n\right|\leqslant\frac{|k|}{n+1}; \tag{5}$$

$$\frac{1}{n+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_{n-|k|}(e^{i\theta}, e^{i\theta})d\mu=$$

$$=\frac{n-|k|+1}{n+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|p(\theta)\frac{K_{n-|k|}(e^{i\theta}, e^{i\theta})}{n-|k|+1}-1\right|d\theta=$$

$$=\frac{n-|k|+1}{n+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ik\theta}d\theta+\frac{1}{n+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_{n-|k|}(e^{i\theta}, e^{i\theta})e^{ik\theta}d\mu_1. \tag{6}$$

Переходя к пределу в равенстве (4) при $n\to\infty$ с учетом (5), (6) и леммы 1, получим (3).

Теорема 2. *Для справедливости предельного соотношения* (2) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|K_n(z,\cdot)|\,|\varphi_n(\cdot)|^{-1}} = 1$$

равномерно (по z) внутри U.

Теорема 2 является следствием следующей леммы

Лемма 2. *Пусть* $\{z_{\nu n}\}_{\nu=1}^{n}\subset T$, $n=1, 2, \ldots$

$$p_n(z)=\prod_{\nu=1}^{n}(z-z_{\nu n}),\quad d\nu_n=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\delta(z-z_{\nu n}).$$

Для того чтобы

$$d\nu_n \xrightarrow{\bullet} \frac{d\theta}{2\pi}, \tag{7}$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|p_n(z)|} = 1 \tag{8}$$

равномерно внутри U.

Необходимость. Из (7) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{|p_n(z)|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|z-e^{i\theta}|\,d\theta = 0$$

равномерно внутри U.

Достаточность. Так как

$$\|d\nu_n\| = \sup_{|f|\le 1}\left|\frac{1}{2\pi}\int_T f\,d\nu_n\right| = \frac{1}{2\pi}\int_T d\nu_n = 1, \tag{9}$$

то в силу слабой компактности единичной сферы в сопряженном пространстве (см. ([4]), с. 188) из последовательности $\{d\nu_n\}$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.

Если $d\nu(\theta)$ произвольный слабый предел для $\{d\nu_n\}$, то согласно (8)

$$\int_0^{2\pi} \ln|z-e^{i\theta}|\,d\nu(\theta) = 0,$$

откуда следует

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\,d\nu(\theta) = 0,\quad |k| = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Так как тригонометрическая проблема моментов имеет единстпенное решение (см. (5)), то из (9), (10) получаем, что $d\mu(\theta)=\frac{d\theta}{2\pi}$.

Лемма 2 доказана.

(По поводу леммы 2 см. (6), § 7, 4)

Кироваканский государственный педагогический институт

Ա. Վ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ

Սեգյոի կորիզի զրոների մասին

Դիցուք $\mu(\theta)$ *չնվազող սահմանափակ ֆունկցիա է որոշված* $[0, 2\pi]$ *միջակայքում: Դիտարկվում է միավոր շրջանագծի վրա ըստ* $d\mu$*-ի օրթոգոնալ բազմանդամների* $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *հաջորդականությունը և նրանց համապատասխան Սեգյոի կորիզը՝*

$$K_n(z, \zeta)=\sum_{k=0}^{n}\overline{\varphi_k(\zeta)}\,\varphi_k(z)$$

Հայտնի է, որ ֆիքսած ζ*-ի համար* $(|\zeta|=1)$, $K_n(z, \zeta)$*-ի զրոները պարզ են և ընկած են միավոր շրջանագծի վրա: Նշանակենք* $C(T)$*-ով միավոր շրջանագծի վրա անընդհատ կոմպլեքս ֆունկցիաների տարածությունը: Աշխատանքում ապացուցված է հետևյալ թեորեմը՝*

Թեորեմ: Երբ $\mu'(\theta)>0$, հ. ա. $\theta\in[0, 2\pi]$, ապա ցանկացած f-ի համար ($f\in C(T)$) տեղի ունի հետևյալ սահմանային առնչությունը՝

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_{i,n})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\,d\theta,$$

որտեղ $\{\zeta_{i,n}\}_{i=1}^{n}$, $n=1, 2, \ldots$, $K_n(z, \zeta)$-ի զրոներն են:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Я. Л. Геронимус*, Многочлены ортогональные на окружности и на отрезке. Физматгиз, М., 1958. 2 *М. Г. Крейн, А. А. Нудельман*, Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, Наука, М., 1973. 3 *Е. А. Рахманов*, Об асимптотике отношения ортогональных многочленов, Мат. сб., т. 103(145), с. 237—252 (1977). 4 *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин*, Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, М., 1981. 5 *Н. И. Ахиезер*, Классическая проблема моментов, Физматгиз, М., 1961. 6 *Дж. Л. Уолш*, Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, ИЛ, М., 1961.