ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVII 1988 3

УДК 529.3.01

МЕХАНИКА

А. Н. Оганесян

О напряженном состоянии тяжелого круглого кольца, усиленного накладками

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 9/II 1988)

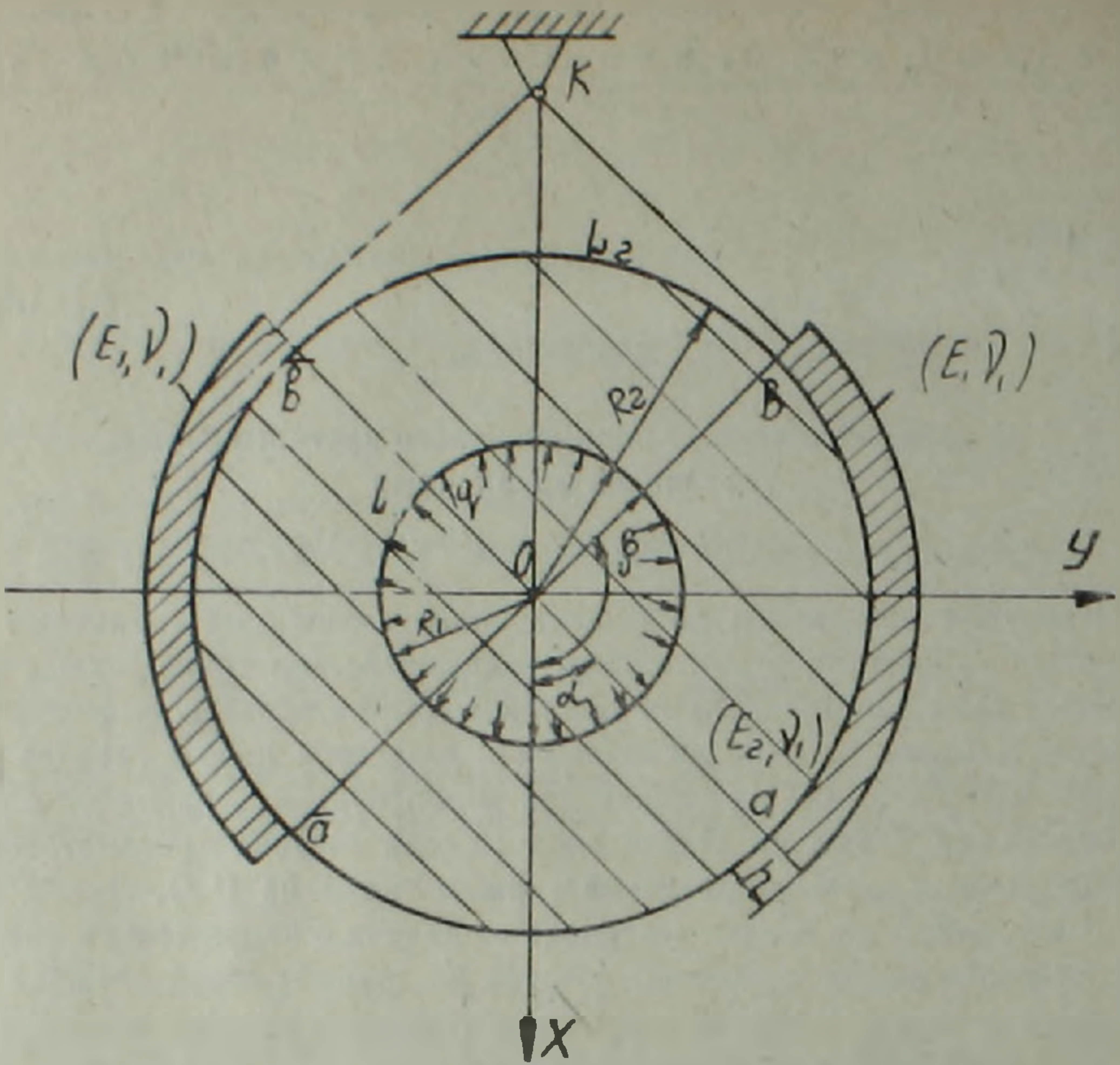
Основные результаты по исследованию смешанных граничных задач теории упругости о контактном взаимодействии тонкостенных элементов в виде прямолинейных накладок (стрингеров) с массивными деформируемыми телами, восходящих к известной работе Мелана ([1]), отражены в ([2]). Такие же задачи для кольцеобразных накладок с круговыми осями в рамках обобщенной модели Мелана рассмотрены в ([3]). Из работ в этом направлении укажем также на ([4,5]).

В настоящей статье рассматривается задача о напряженном состоянии тяжелого круглого кольца, которое по границе своей внешней окружности усилено двумя одинаковыми кольцеобразными накладками.

1. Пусть упругое круглое кольцо плотности ρ, ограниченное двумя концентрическими окружностями L_1 и L_2 радиусов R_1 и R_2 $(R_1<R_2)$ и находящееся в условиях плоской деформации, подвержено действию сил тяжести и равномерно распределенного по внутренней окружности L_1 нормального давления q_1. На своей внешней окружности L_2 вдоль дуг $\overset{\frown}{\bar{b}\bar{a}}$ и $\overset{\frown}{ab}$, где $a=R_2e^{i\alpha_1}$, $b=R_2e^{i\beta_1}$ $(0<\alpha_1<\beta_1<\pi/2;\ \alpha_1+\beta_1=\pi)$, кольцо усилено двумя одинаковыми и симметрично расположенными накладками малой толщины h, имеющими форму в виде неполных круговых колец. Далее при помощи последних кольцевой диск подвешен на двух нерастяжимых лентах, сводящихся к одной неподвижной точке (рисунок). Как в ([3]), накладки будут трактоваться в рамках теории тонких круговых оболочек, лишенных изгибной жесткости. Требуется определить радиальные $(q_-(\theta))$ и окружные $(\tau_-(\theta))$ контактные напряжения.

Чтобы вывести определяющее уравнение поставленной задачи, сначала рассмотрим равновесие кольца при наличии сил тяжести, когда на его внутренней окружности L_1 действует равномерно распределенное нормальное давление q_1, а на двух симметрично расположенных дугах $\overset{\frown}{\bar{b}\bar{a}}$ и $\overset{\frown}{ab}$ его внешней окружности L_2 действуют радиальные и тангенциальные напряжения соответственно интенсивностей $q_-(\theta)$ и $\tau_-(\theta)$ $(\alpha_1<|\theta|<\beta_1)$, причем $q_-(-\theta)=q_-(\theta)$, $\tau_-(-\theta)=-\tau_-(\theta)$.

Найдем на L_2 деформацию кольца в окружном направлении $\varepsilon_\theta^{(2)}$. С этой целью, как в ([6]), воспользуемся следующим граничным условием:



Кривые зависимости относительной эффективности систем гетеродинного приема от уровня принимаемого сигнала при $\sigma_j^2 = 0{,}8$мкА², $\tau = 5 \cdot 10^{-9}$с, $\Delta F = 10^8$Гц, $\Delta F_{п} = 10^7$Гц, $\Delta F_{сч} = 10^9$Гц, $K = 10$. Для кривых 1, 3 W соответственно равно $2 \cdot 10^{-9}$с; $0{,}5 \cdot 10^{-9}$с; для кривых 2, 4–6 $W = 10^{-9}$с. Для *а* $G = 1$, $\bar{i}_г = 10$мкА; для *б* $G = 10^4$; кривым 4, 5, 6 соответствует $\bar{i}_г$, равное 1, 10^2, 10^3мкА

$$N - iT = \Phi(t) + \overline{\Phi(t)} - e^{2i\theta}[\bar{t}\Phi'(t) + \Psi(t)] -$$
$$- \rho g(t + \bar{t})(1 + e^{2i\theta})/4 \quad t \in L_i \quad (i = 1, 2), \tag{1.1}$$

где последний член учитывает влияние сил тяжести (g—ускорение свободного падения), N и T—радиальный и тангенциальный компоненты внешнего напряжения, действующего на границах кольца $L_i (i = 1, 2)$, а $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$—комплексные потенциалы ([6]). В разбираемом случае

$$N|_{L_1} = -q_1; \; N|_{L_2} = q_-(\theta); \; T|_{L_1} = 0, \; T|_{L_2} = \tau_-(\theta), \tag{1.2}$$

причем функции $q_-(\theta)$ и $\tau_-(\theta)$ $(-\pi < \theta < \pi)$ вне интервалов $\alpha_1 < \theta < \beta_1$ считаются продолженными тождественным нулем.

Далее, приняв во внимание известные результаты из ([6]), при помощи (1.1) и (1.2) после несложных преобразований получим

$$\varepsilon_\theta^{(2)} = \frac{\varkappa + 1}{8\pi\mu_2} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left[\operatorname{ctg}\left(\frac{u - \theta}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{u + \theta}{2}\right) \right] \tau_-(u)\, du -$$

$$-\frac{\varkappa+1}{8\pi\mu_2}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} H(u,\theta)\tau_-(u)du+\frac{\varkappa-1}{4\mu_2}q_-(\theta)+\frac{(\varkappa+1)q_1}{8\mu_2(\delta-1)}-$$

$$-\frac{(\varkappa+1)p(\delta-1)}{32\pi\mu_2\delta\sin\alpha_1}g(\theta)-\frac{(\varkappa+1)p\beta_1}{16\pi\mu_2\delta\sin\alpha_1}-\frac{p(\varkappa+\delta)}{8\pi\mu_2\delta(\delta+1)}\cos\theta+ \tag{1.3}$$

$$+\frac{\varkappa+1}{4\pi\mu_2(\delta-1)}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} u\tau_-(u)du+\frac{\varkappa+1}{\pi\mu_2(\delta^2-1)}\cos\theta\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\sin u\tau_-(u)du;$$

$$H(u,\theta)=\sum_{k=2}^{\infty}h_k\sin ku\cos k\theta;\quad g(\theta)=\sum_{k=2}^{\infty}g_k\cos k\theta,$$

$$h_k=4[2\delta^{1-k}-k(k-1)\delta^2+2(k^2-1)\delta-k(k+1)]/\Delta_k,$$

$$g_k=4k\sin(k\beta_1)(\delta-1)^2/\Delta_k\ \ (k=2,3,\ldots;\ 0<\theta<\pi);\ \varkappa=3-4\nu_2;$$

$$\Delta_k=\delta^{k+1}+\delta^{1-k}-k^2\delta^2+2(k^2-1)\delta-k^2;\ \delta=R_2^2/R_1^2;\ p=2\pi\rho g R_1.$$

Здесь ν_2 — коэффициент Пуассона, а $\mu_2=E_2/2(1+\nu_2)$ — параметр Ляме.

Теперь, ограничиваясь ввиду симметрии только правой накладкой и записав ее основные уравнения (3) ($\alpha_1<\theta<\beta_1$)

$$\frac{dq}{d\theta}=-\tau_-(\theta);\ q_-(\alpha_1)=0,\ q_-(\beta_1)=-p/2R\sin\alpha_1,$$

где $p=\pi\rho g(R_2^2-R_1^2)$ — вес кольцевого диска, будем иметь (3)

$$\varepsilon_\theta^{(1)}(\theta)=\frac{1-\nu_1^2}{hE_1}R\int_{\alpha}^{\theta}\tau_-(u)du\ \ (\alpha_1<\theta<\beta_1). \tag{1.4}$$

Здесь $\varepsilon_\theta^{(1)}$ — осевая деформация накладки, а ν_1 и E_1 — ее упругие постоянные.

Далее из условия контакта

$$\varepsilon_\theta^{(1)}(\theta)=\varepsilon_\theta^{(2)}(\theta)\quad(\alpha_1<\theta<\beta_1)$$

при помощи (1.3) и (1.4) после перехода к новым переменным $\xi=\theta-\frac{\pi}{2}$, $\eta=u-\frac{\pi}{2}$ получим следующее сингулярное интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\operatorname{ctg}\frac{\eta-\xi}{2}-\operatorname{tg}\frac{\xi+\eta}{2}-K(\xi,\eta)\right]\varphi'(\eta)d\eta=\lambda\varphi(\xi)+f(\xi), \tag{1.5}$$

которое должно рассматриваться при граничных условиях

$$\varphi(-\alpha)=0,\quad\varphi(\alpha)=\sec\alpha/4. \tag{1.6}$$

Здесь приняты обозначения

$$\varphi(\xi)=\int_{-\alpha}^{\xi}\tau(\eta)d\eta,\ \tau(\xi)=\tau_-(\theta)/p=\tau_-(\xi+\pi/2)/p\ \ (-\alpha\leqslant\xi\leqslant\alpha),$$

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha_1,\quad\lambda_1=\frac{(1-\nu_1^2)E_2R_2}{(1-\nu_2^2)E_1h},\qquad\lambda_1'=\frac{1-2\nu_2}{1-\nu_2},\ \lambda=\lambda_1+\lambda_1',$$

$$K(\xi,\eta)=\sum_{k=1} h_{2k}\cos(2k\xi)\cdot\sin(2k\eta)-\sum_{k=1} h_{2k-1}\sin(2k-1)\xi\cos(2k-1)\eta-$$

$$-\frac{\pi+2\eta}{\delta-1},\quad f(\xi)=\frac{\pi+2\alpha}{4\pi\delta}\sec\alpha-\frac{2\bar{q}_1}{\delta-1}+\frac{\delta-1}{\pi\delta}\sec\alpha\times$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}\cos(2k\xi)+\sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1}\sin(2k-1)\xi\right],\quad h_1=\frac{8}{1-\delta^2},$$

$$f_1=4(\varkappa+\delta)/(\varkappa+1)(\delta^2-1),\quad f_{2k}=2k\sin(2k\alpha)(\delta-1)^2/\Delta_{2k}\quad(k=1,2,\ldots),$$

$$f_{2k+1}=(2k+1)\cos[(2k+1)\alpha](\delta-1)^2/\Delta_{2k+1},\quad \bar{q}_1=q_1/p.$$

После того, как построено решение уравнения (1.5)—(1.6), остальные механические характеристики задачи будут определяться по формулам

$$T_1^0(\xi)=\varphi(\xi),\quad q(\xi)=-\varphi(\xi)\quad(-\alpha\leqslant\xi\leqslant\alpha),$$

$$T_1^0(\xi)=T_1(\theta)/pR_2=T_1(\xi+\pi/2)/pR_2,\quad q(\xi)=q_-(\xi+\pi/2)/p,$$

где $T_1(\theta)$—осевое усилие в накладке.

2. Определяющее интегродифференциальное уравнение (1.5) при граничных условиях (1.6) сведем к эквивалентной бесконечной системе линейных уравнений, для чего положим

$$\tau(\xi)=\varphi'(\xi)=\frac{\sec(\xi/2)}{\sqrt{2(\cos\xi-\cos\alpha)}}\sum_{n=0} x_n T_n\left[\frac{\operatorname{tg}(\xi/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)}\right]\quad |\xi|<\alpha, \tag{2.1}$$

где $T_n(\xi)$—многочлены Чебышева первого рода. Далее следуя известной процедуре (([3]), §3, гл. III), уравнение (1.5)—(1.6) сведем к бесконечной системе

$$x_m-\frac{1}{2\pi}\operatorname{ctg}\alpha/2\sum_{n=1}^{\infty} K_{mn}x_n=a_m\quad(m=1,2,\ldots),$$

$$K_{mn}=\lambda K_{mn}^{(1)}+K_{mn}^{(2)}+K_{mn}^{(3)}\quad(m,n=1,2,\ldots), \tag{2.2}$$

$$a_m=\frac{1}{2\pi}\operatorname{ctg}\alpha/2[C_m+(K_{m,0}-\sec\alpha/2b_m)x_0],$$

$$c_m=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\xi)U_{m-1}\left[\frac{\operatorname{tg}(\xi/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)}\right]\sec(\xi/2)\sqrt{2(\cos\xi-\cos\alpha)}\,d\xi,$$

$$K_{m,n}^{(3)}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} K(\xi,\eta)U_{m-1}\left[\frac{\operatorname{tg}(\xi/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)}\right]T_n\left[\frac{\operatorname{tg}(\xi/2)}{\operatorname{tg}(\alpha/2)}\right]\frac{\sec\frac{\xi}{2}\sec\frac{\eta}{2}\sqrt{2(\cos\xi-\cos\alpha)}}{\sqrt{2(\cos\eta-\cos\alpha)}}\,d\xi\,d\eta.$$

Здесь $U_m(\xi)$—многочлены Чебышева второго рода. Выражения $K_{m,n}^{1}$, bm и $K_{m,n}^{(2)}$ приведены в (([3]), §3, гл. III).

Теперь на основании свойства вырожденности ядра $K(\xi,\eta)$ и функции $f(\xi)$ из (1.7) после несложных преобразований будем иметь

$$K^{(3)}_{mn}=\frac{4\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{\pi}\left[\sum_{k=1}^{\infty}h_{2k}\alpha^{(n)}_k\beta^{(m)}_k-\sum_{k=1}^{\infty}h_{2k-1}\left|\gamma^{(n)}_k\delta^{(m)}_k-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\alpha^{(n)}_0\beta^{(m)}_0}{\delta-1}\right|\right]\quad (m=1,\ 2,\ \ldots;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

$$C_m=4\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\left\{\left|\frac{\pi+2\alpha}{4\pi\delta}\sec\alpha-\frac{2\bar q_1}{\delta-1}\right|\beta^{(m)}_0+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta-1}{\pi\delta}\sec\alpha\left|\sum_{k=1}^{\infty}f_{2k}\beta^{(m)}_k+\sum_{k=1}^{\infty}f_{2k-1}\delta^{(m)}_k\right|\right\};$$

$$\alpha^{(n)}_k=\int\limits_0^{\pi}\sin\left[4k\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\varphi\right)\right]\cos n\varphi\, d\varphi;$$

$$\beta^{(m)}_k=\int\limits_0^{\pi}\cos\left[4k\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\theta\right)\right]D(\alpha,\ \theta)\sin(m\theta)\sin\theta\, d\theta;$$

$$\gamma^{(n)}_k=\int\limits_0^{\pi}\cos\left[2(2k-1)\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\varphi\right)\right]\cos n\varphi\, d\varphi;$$

$$\delta^{(m)}_k=\int\limits_0^{\pi}\sin\left[2(2k-1)\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\theta\right)\right]D(\alpha,\ \theta)\sin(m\theta)\sin\theta\, d\theta;$$

$$\alpha^{(n)}_0=\int\limits_0^{\pi}\left[\pi+4\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\varphi\right)\right]\cos n\varphi\, d\varphi;$$

$$\beta^{(m)}_0=\int\limits_0^{\pi}D(\alpha,\ \theta)\sin(m\theta)\sin\theta\, d\theta,\quad D(\alpha,\ \theta)=\left(1+\cos^2\theta\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}.$$

Коэффициенты $\alpha^{(n)}_k$, $\beta^{(m)}_k$, $\gamma^{(n)}_k$, $\delta^{(m)}_k$, $\alpha^{(n)}_0$, $\beta^{(m)}_0$, представляющие собой коэффициенты Фурье достаточно простых функций, в некоторых частных случаях вычисляются аналитически, а в общем случае эффективно могут быть вычислены численными методами ([1]).

Так как согласно (1.7) ядро $K(\xi,\ \eta)$ в квадрате $-\alpha\leqslant\xi,\ \eta\leqslant\alpha$ имеет непрерывные частные производные любого порядка, то при помощи интегрирования по частям можем записать

$$K^{(3)}_{m,n}=L^{(3)}_{m,n}/n\quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Аналогичным образом

$$K^{(j)}_{m,n}=L^{(j)}_{m,n}/n\quad (j=1,\ 2;\ n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Исходя из

$$S^{(j)}_m=\sum_{n=1}^{\infty}|K^{(j)}_{m,n}|\quad (j=1,\ 2),$$

на основании последних формул и при помощи известной методики

(([7]), § 3, гл. III) показывается, что $S_m^{(j)}=o(m^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})(m\to\infty)$, $a_m=o(1)$, где ε—сколь угодно малое положительное фиксированное число, откуда вытекает квазиполная регулярность бесконечной системы (2.2).

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ն. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Վերադիրներով ուժեղացված կլոր ծանր օղակի լարվածային վիճակի մասին

Դիտարկվում է ծանրության ուժերի ազդեցության տակ գտնվող կլոր առաձգական օղակի լարվածային վիճակի վերաբերյալ խնդիրը, երբ օղակը իր արտաքին շրջանագծի երկու աղեղների երկայնքով, որոնք ունեն միևնույն երկարությունը և կենտրոնի նկատմամբ դասավորված են համաչափ, ուժեղացված է երկու միատեսակ շրջանային օղակաձև առաձգական վերադիրներով։ Վերջիններիս միջոցով երկու չձգվող ժապավեններով օղակը կախված է մեկ անշարժ կետից։ Խնդրի լուծումը բերվում է Հիլբերտի կորիզով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծման, որը Չեբիշևի բազմանդամների մեթոդի օգնությամբ իր հերթին բերվում է գծային հավասարումների ռեգուլյար անվերջ համակարգի։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *E. Melan*, Ingr. Arch., 1132, Bol 3, № 2. [2] Развитие теории контактных задач в СССР. Наука, М. 1976. [3] *В. М. Александров, С. М. Мхитарян*, Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. Наука, М., 1983. [4] *С. М. Мхитарян Ф. С. Торосян*, Изв. АН АрмССР. Механика т. 31, № 5, с. 3—19 (1978). [5] *С. М. Мхитарян, Ф. С. Торосян*. Изв. АН АрмССР. Механика, т. 36. № 1, с. 3—16 (1983). [6] *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости. Наука, М., 1966. [7] *К. Ланцош*, Приближенные методы прикладного анализа, Физматгиз, М., 1961.