

УДК 517.984.52

МАТЕМАТИКА

С. В. Бабасян, И. Г. Хачатрян

Разложение Фурье при помощи минимальной системы обобщенных собственных функций самосопряженного дифференциального оператора

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 2/VI 1988)

Рассматривается в $L^2(0, \infty)$ самосопряженный дифференциальный оператор L , порожденный дифференциальным выражением $(^1)$

$$l[y] = \frac{1}{t^{2n}} y^{(2n)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{t^{2k}} [p_{2k}(x) y^{(k)}]^{(k)} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{2t^{2k+1}} \{ [p_{2k+1}(x) y^{(k)}]^{(k+1)} + \\ + [p_{2k+1}(x) y^{(k+1)}]^{(k)} \}, \quad 0 < x < \infty,$$

где коэффициенты $p_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, 2n-2$) — вещественные функции и удовлетворяют условиям

$$\int_0^1 x^{2n-1-k} |p_k(x)| dx + \int_1^\infty |p_k(x) - a_k| dx < \infty, \quad k=0, 1, \dots, 2n-2,$$

с некоторыми постоянными a_k . Область определения оператора L описывается при помощи n краевых условий в нуле (их вид не является существенным для последующего).

Выводится разложение Фурье, в котором используется минимальная система обобщенных собственных функций оператора L . В случае, когда $a_k=0$ ($k=0, 1, \dots, 2n-2$), такое разложение получено в работах $(^2-^5)$. Здесь применяется метод, указанный в работе $(^6)$.

При любом комплексном μ уравнение $Q(\xi)=\mu$, где $Q(\xi)=\xi^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-2} a_k \xi^k$,

имеет в верхней открытой полуплоскости столько же корней, сколько в нижней. Обозначим через M множество всех тех вещественных значений параметра μ , при которых уравнение $Q(\xi)=\mu$ имеет комплексные кратные корни, а через $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m$ — все те значения μ из M , при которых указанное уравнение имеет вещественные кратные корни. Ясно, что число точек множества M не превышает $2n-1$ и, кроме того, $m \geq 1$. В каждом из интервалов (μ_k, μ_{k+1}) ($k=1, 2, \dots, m$; $\mu_{m+1}=\infty$) число вещественных корней уравнения $Q(\xi)=\mu$ постоянно. Это число обозначим через $2r_k$ ($k=1, 2, \dots, m$). Заметим, что $r_m=1$, кроме того, при $\mu < \mu_1$ уравнение $Q(\xi)=\mu$ не имеет вещественных корней. Пусть $\xi_\nu(\mu)$ ($\nu=1, 2, \dots, 2r_k$) — вещественные корни уравнения $Q(\xi)=\mu$, $\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1})$, причем они как функции от μ непре-

рывны на интервале (μ_k, μ_{k+1}) , монотонно убывают при $1 \leq v \leq r_k$ и монотонно возрастают при $r_k + 1 \leq v \leq 2r_k$.

Непрерывный спектр оператора L заполняет весь интервал $[\mu_1, \infty)$. Точечный спектр T ограничен снизу и не имеет конечных точек сгущения, отличных от точек множества M . Если, дополнительно, коэффициенты $p_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, 2n-2$) суммируемы в окрестности нуля, то точечный спектр оператора L ограничен.

При каждом $\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1})$, $\mu \notin M \cup T$, дифференциальное уравнение $L[\varphi] = \mu \varphi$ имеет r_k линейно независимых ограниченных решений $\varphi_s(x, \mu)$ ($s=1, 2, \dots, r_k$), удовлетворяющих краевым условиям, соответствующим оператору L . Эти решения обладают при $x \rightarrow \infty$ асимптотикой

$$\varphi_s(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \sum_{j=1}^{r_k} \sqrt{|\xi_{sj}(\mu)|} S_{sj}(\mu) e^{i x \xi_{sj}(\mu)} + \sum_{j=r_k+1}^{2r_k} \sqrt{|\xi_{sj}(\mu)|} S_{sj}(\mu) e^{i x \xi_{sj}(\mu)} \right\} + o(1),$$

где матрицы $(S_{sj}(\mu))_{s,j=1}^{r_k}$ и $(S_{sj}(\mu))_{s,j=r_k+1}^{2r_k}$ невырожденные и связаны

$$\text{соотношением } \sum_{j=1}^{r_k} S_{sj}(\mu) \overline{S_{vj}(\mu)} = \sum_{j=r_k+1}^{2r_k} S_{sj}(\mu) \overline{S_{vj}(\mu)}, \quad s, v = 1, 2, \dots, r_k.$$

Одну из этих матриц можно взять произвольно, а по ней вторая матрица и решения $\varphi_s(x, \mu)$ определяются однозначно. Впредь будем предполагать, что указанные матрицы унитарны и их элементы измеримые функции.

Теорема 1. Для любой функции $f \in L^2(0, \infty)$ имеет место разложение

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_k \psi_k(x) \int_0^\infty f(t) \overline{\psi_k(t)} dt + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{s=1}^{r_k} \int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}} \Phi_s(\mu) \varphi_s(x, \mu) d\mu + \\ + \int_{\mu_m}^\infty \Phi_1(\mu) \varphi_1(x, \mu) d\mu, \end{aligned} \quad (1)$$

а также равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx = \sum_k \left| \int_0^\infty f(t) \overline{\psi_k(t)} dt \right|^2 + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{s=1}^{r_k} \int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}} |\Phi_s(\mu)|^2 d\mu + \int_{\mu_m}^\infty |\Phi_1(\mu)|^2 d\mu,$$

где $\{\psi_k(x)\}$ — ортонормированная система всех собственных функций оператора L , а

$$\Phi_s(\mu) = \int_0^\infty f(x) \overline{\varphi_s(x, \mu)} dx, \quad \mu_k < \mu < \mu_{k+1}, \quad 1 \leq s \leq r_k, \quad 1 \leq k \leq m. \quad (2)$$

При этом последний интеграл в (1) и интеграл (2) сходятся по метрике $L^2(0, \infty)$ и $L^2(\mu_k, \mu_{k+1})$ соответственно.

При помощи замены переменной $\mu = Q(i)$ полученное разложение (1) можно упростить. При любом $i \in (-\infty, \infty)$, для которого $Q(i) \notin M \cup T$, уравнение $L[u] = Q(i)u$ имеет единственное решение

$u(x, \lambda)$, удовлетворяющее краевым условиям, соответствующим оператору L , и обладающее асимптотикой

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{ix\lambda} + \sum_{v=1}^{r(\lambda)} \sqrt{r_v(\lambda)} S_v(\lambda) e^{ix\lambda_v} \right\} + o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где $r_v(\lambda)$ ($v=1, 2, \dots, r(\lambda)$) — все те вещественные корни уравнения $Q(\cdot) = Q(\lambda)$, которые как функции от λ непрерывны и монотонно убывают на каждом интервале, не содержащем точек множества $\bigcup_{k=1}^m \{\lambda_k; Q(\lambda) = \mu_k\}$. В формуле (3) функции $S_v(\lambda)$ удовлетворяют равенству $\sum_{v=1}^{r(\lambda)} |S_v(\lambda)|^2 = 1$.

Теорема 2. Для любой функции $f \in L^2(0, \infty)$ интеграл

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(x) \overline{u(x, \lambda)} dx, \quad -\infty < \lambda < \infty, \quad (4)$$

сходится по метрике $L^2(-\infty, \infty)$ и имеет место разложение

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty F(\lambda) u(x, \lambda) d\lambda + \sum_k \psi_k(x) \int_0^\infty f(t) \overline{\psi_k(t)} dt, \quad 0 < x < \infty, \quad (5)$$

а также равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty |F(\lambda)|^2 d\lambda + \sum_k \left| \int_0^\infty f(t) \overline{\psi_k(t)} dt \right|^2$$

При этом первый интеграл в (5) сходится по метрике $L^2(0, \infty)$. Сужение $\bar{L}$ оператора L на ортогональном дополнении $\bar{L}^2(0, \infty)$ линейной оболочки всех собственных функций $\psi_k(x)$ совпадает с абсолютно непрерывной частью оператора L . Кроме того, формулы (4) и

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty F(\lambda) u(x, \lambda) d\lambda, \quad 0 < x < \infty,$$

устанавливают взаимно-обратные изометрические отображения $\bar{L}^2(0, \infty)$ на $L^2(-\infty, \infty)$ и $L^2(-\infty, \infty)$ на $\bar{L}^2(0, \infty)$ соответственно, переходящие друг в друга оператор $\bar{L}$ и оператор умножения на функцию $Q(\lambda)$ в $L^2(-\infty, \infty)$.

Замечание 1. Пусть λ_0 и λ_1 ($\lambda_0 < \lambda_1$) — наименьший и наибольший вещественные корни уравнения $Q(\lambda) = \mu_m$ соответственно. Тогда можно получить разложение

$$f(x) = \int_{\lambda_0}^\infty F(\lambda) u(x, \lambda) d\lambda + \sum_k \psi_k(x) \int_0^\infty f(t) \overline{\psi_k(t)} dt, \quad 0 < x < \infty,$$

где решение $u(x, \lambda)$ обладает асимптотикой (3) при $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$ и асимптотикой $u(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{ix\lambda} + \sum_{v=1}^{r(\lambda)} \sqrt{r_v(\lambda)} S_v(\lambda) e^{ix\lambda_v} \right\} + o(1)$, $x \rightarrow \infty$, при $\lambda > \lambda_1$.

Замечание 2. В случае $a_{2k+1}=0$ ($k=0, 1, \dots, n-2$) можно получить разложение

$$f(x) = \int_0^\infty F(\lambda) u(x, \lambda) d\lambda + \sum_k \psi_k(x) \int_0^\infty f(t) \overline{\psi_k(t)} dt, \quad 0 < x < \infty,$$

где решение $u(x, \lambda)$ обладает асимптотикой

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{i\lambda x a(\lambda)} + \sum_{n=1}^{\infty} V[\tilde{\zeta}_n(\lambda)] S_n(\lambda) e^{i\lambda \tilde{\zeta}_n(\lambda) a(\lambda)} \right\} + o(1), \quad x \rightarrow \infty.$$

Здесь $a(\lambda) = \operatorname{sgn} Q(\lambda)$.

Ереванский государственный университет
Институт математики Академии наук Армянской ССР

Ս. Վ. ԲԱՐԱՍՅԱՆ, Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Ֆուրյեի վերլուծություն ինֆնահամարյալ դիֆերենցիալ օպերատորի
րնդհանրացված սեփական ֆունկցիաների միևիմալ համակարգի միջոցով

Դիտարկվում է $L^2(0, \infty)$ տարածությունում ինքնահամարյալ դիֆերեն-
ցիալ L օպերատորը.

$$L = \frac{1}{i^{2n}} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{i^{2k}} \frac{d^k}{dx^k} \left[p_{2k}(x) \frac{d^k}{dx^k} \right] + \\ + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2i^{2k+1}} \left[\frac{d^k}{dx^k} \right] p_{2k+1}(x) \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} + \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \left[p_{2k+1}(x) \frac{d^k}{dx^k} \right], \quad 0 < x < \infty,$$

որտեղ՝ $p_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, 2n-2$) գործակիցները իրական ֆունկցիաներ են
և որոշ a_k հաստատունների հետ բավարարում են

$$\int_0^1 x^{2n-1-k} |p_k(x)| dx + \int_1^\infty |p_k(x) - a_k| dx < \infty, \quad k=0, 1, \dots, 2n-2,$$

պայմաններին: L օպերատորի որոշման տիրույթը նկարագրվում է n եղրա-
յին պայմաններով զրո կետում:

Արտածվում է Ֆուրյեի վերլուծություն L օպերատորի րնդհանրացված
սեփական ֆունկցիաների միևիմալ համակարգի միջոցով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- 1 М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Наука, М., 1969.
2 И. М. Рапопорт, О некоторых асимптотических методах в теории дифференциаль-
ных уравнений, Изд-во АН УССР, Киев, 1954. 3 В. И. Фунтаков, Изв. АН АрмССР,
Сер. физ.-мат. и тех. наук, № 1, с. 3—21 (1961). 4 Г. М. Кесельман, Дифференциаль-
ные уравнения, т. 5, № 9 с. 1700—1714 (1969). 5 И. Г. Хачатрян, Функци. анализ и
его прилож., т. 17, № 1 с. 40—52 (1983). 6 И. Г. Хачатрян, Изв. АН АрмССР, Сер.
мат., т. 19, № 4 с. 265—279 (1984).