УДК 517.554

МАТЕМАТИКА

М. В. Казарян

О голоморфном продолжении функций
 с плюриполярными особенностями

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 26/V 1988)

1. В работе изучается возможность аналитического продолжения голоморфных функций с плюриполярными особенностями при условии, что такое продолжение есть по некоторой группе переменных. Доказываются аналоги основной леммы Гартогса и их обобщения (см. например (1, 2)).

В работе автора (3) доказано, что если функция $f = f(z, w)$ голоморфна в области $D \times G$ в $C_z^n \times C_w^m$ и при каждом фиксированном $a \in D$ функция $f_a(w) = f(a, w)$ продолжается на всю плоскость C_w до голоморфной функции с единственной особой точкой, то f голоморфно продолжается в область $(D \times C_w) \setminus S$, где S — аналитическое множество.

Аналогичное утверждение справедливо и в случае, когда особенности функции $f_a(w)$ — конечное множество точек в C_w .

А. Садуллаев и Е. М. Чирка (4) рассматривали функции с более общими — полярными особенностями. Ими доказано, что глобальное голоморфное продолжение с полярными особенностями возможно при минимальных естественных условиях на множество сечений, вдоль которых есть такое продолжение. В случае, когда эти сечения многомерны, а соответствующие исключительные множества плюриполярны, справедлива следующая

Теорема 1. Пусть функция $f = f(z, w)$ голоморфна в области $D \times G \subset C_z^n \times C_w^m$, $n \geq 1$, $m \geq 1$, за исключением замкнутого и плюриполярного в $D \times G$ множества S и пусть $E \subset D$ — неплюриполярное множество. Предположим, что при каждом фиксированном $a \in E$ функция $f_a(w)$ продолжается до функции, голоморфной в C_w^m за исключением плюриполярного множества особенностей. Тогда f голоморфно продолжается в $(D \times C_w^m) \setminus \bar{S}$, где $\bar{S}$ — замкнутое плюриполярное подмножество в $D \times C_w^m$, причем $\bar{S} \cap (D \times G) \subset S$.

Следующая теорема является аналогом основной леммы Гартогса для функций с плюриполярными особенностями.

Теорема 2. Пусть функция $f = f(z, w)$ голоморфна в области $D \times G \subset C_z^n \times C_w^m$, $m \geq 1$, $n \geq 1$, за исключением замкнутого и плюриполярного в $D \times G$ множества особенностей S и пусть $S' = \{z : z \times G \subset S\}$. Предположим, что при каждом фиксированном $a \in D \setminus S'$

функция $f(a, w)$ голоморфно продолжается в область $\bar{U} \supset G$ за исключением плюриполярного множества особенностей. Тогда f голоморфно продолжается в $(D \times G) \setminus S$, где $\bar{S}$ — замкнутое плюриполярное множество в $D \times G$ и $\bar{S} \cap (D \times G) \supset S$.

Доказательство этих теорем получается индукцией по числу переменных w . При $m=1$ они доказаны в работе А. Садуллаева и Е. М. Чирки (*), где предполагается голоморфность f всюду в $D \times G$. Чтобы применять индукцию, убедимся сначала, что они справедливы и в случае, когда f имеет плюриполярное множество особенностей в $D \times G$. Ограничимся случаем теоремы 1. Пусть точка $b \in G$ такова, что $D \times \{b\} \not\subset S$; тогда множество $S^b = \{z : (z, b) \in S\}$ плюриполярно в D . Положим $D_0 = D \setminus S^b$ и возьмем произвольную подобласть $D_1 \subset D_0$. По построению существует окрестность V в G такая, что f голоморфна в $D_1 \times V$. Если $D_1 \cap E$ непусто, то по теореме 1 из (*) f голоморфно продолжается в $D_1 \times C_w$ вне замкнутого плюриполярного множества. Ввиду произвольности $D_1 \subset D_0$ и по теореме единственности отсюда следует, что f голоморфно продолжается в $(D_0 \times C_w) \setminus S_1$, где S_1 замкнуто и плюриполярно в $D_0 \times C_w$. Так как $(D_0 \times C) \setminus S_1 = (D \times C) \setminus (S_1 \cup (S^b \times C))$, то f голоморфно продолжается в $(D \times C_w) \setminus \bar{S}$, где множество $\bar{S} = S_1 \cup (S^b \times C_w)$ очевидно, замкнуто и плюриполярно в $D \times C_w$.

2. Доказательство теоремы 1. Пусть теорема 1 верна при $w \in C^m$ и докажем ее для $m+1$ переменных $(w, w') \in C^m \times C$. Пусть функция $f = f(z, w, w')$ голоморфна в области $\Omega = D \times G \times G' \subset C^n \times C^m \times C_w$ за исключением замкнутого и плюриполярного в Ω множества S и при каждом фиксированном $a \in E$ функция $f(a, w, w')$ продолжается до функции, голоморфной в $C^{n+1} = C^m \times C_w$ за исключением плюриполярного множества особенностей. Обозначим через $E_1 = (E \times G) \setminus \{(z, w) : z \times w \times G' \subset S\}$ и рассмотрим функцию $f(a, b, w')$, где $(a, b) \in E_1$ — произвольная фиксированная точка. Она по условию голоморфна в G' и продолжается до функции, голоморфной в C_w вне плюриполярного множества особенностей. Так как множество E_1 очевидно, неплюриполярно в $D \times G$, а функция f голоморфна в $\Omega \setminus S$ по совокупности переменных, то по теореме 1 при $m=1$ отсюда следует, что f продолжается до функции, голоморфной в $\Omega_1 = D \times G \times C_w$ за исключением некоторого замкнутого и плюриполярного в Ω_1 множества особенностей S_1 . Пусть теперь $E' = (E \times C_w) \setminus S_1$, где $S_1' = \{(z, w') : z \times G \times w' \subset S_1\}$. Из плюриполярности S_1 в Ω_1 следует, что S_1' плюриполярно в $D \times C_w$, а значит множество E' неплюриполярно в $D \times C_w$. Фиксируем произвольную точку $(a, c) \in E'$ и рассмотрим функцию $f(a, w, c)$. По условию она голоморфно продолжается в C_w^m за исключением плюриполярного множества особенностей. Таким образом, учитывая, что f голоморфна в $\Omega_1 \setminus S_1$, по индуктивному предположению заключаем, что f голоморфно продолжается в $(D \times C_w^m \times C_w) \setminus \bar{S}$, где $\bar{S}$ замкнуто и плюриполярно в $D \times C_w^{m+1}$. Легко также видеть, что $\bar{S} \cap \Gamma(D \times G) \supset S$.

Из теоремы 1 следует геометрическое утверждение о голоморфном продолжении с плюриполярными особенностями вдоль семейства комплексных прямых, проходящих через фиксированную точку.

Следствие 1. Пусть функция $f=f(z, w)$ голоморфна в единичном шаре $B^{n+1} \subset C^{n+1} = C^n \times C$, за исключением замкнутого и плюриполярного в B^{n+1} множества S и при каждом фиксированном i из некоторого неплюриполярного множества $E \subset C^n$ функция $f(i, w, w)$ голоморфно продолжается на всю C , за исключением полярного множества особенностей. Тогда f голоморфно продолжается в $C^{n+1} \setminus \bar{S}$, где S —замкнутое плюриполярное множество в C^{n+1} и $\bar{S} \cap B^{n+1} \subset S$.

Доказательство с помощью дробно-линейной замены координат $z'=z/w, w'=w$ сводится к теореме 1 (см. также следствие 3 в (3)).

Следствие 2. Пусть $E \subset C^n$ и $F \subset C^m$ —неплюриполярные множества и функция $f=f(z, w)$ голоморфна в некоторой окрестности $E \times F$. Если любая из функций $f(a, w), a \in E$ и $f(z, b), b \in F$, продолжается до функции, голоморфной в C^m (соответственно в C^n) за исключением плюриполярного множества особенностей, то f продолжается в $C_{z,w}^{n+m}$ до голоморфной функции с плюриполярным множеством особенностей.

Доказательство очевидно.

Доказательство теоремы 2 по существу такое же, как теоремы 1: доказывается справедливость теоремы 2 из (1) в случае, когда f имеет плюриполярные особенности в $D \times G$ и применяется индукция.

3. В заключение приведем две теоремы о голоморфном продолжении со специальных подмножеств для функций с аналитическими особенностями.

Теорема 3. Пусть $D_1 \subset D \subset C^n$ и $G_1 \subset G \subset C^m$ —области, $E \subset D_1$ и $F \subset G_1$ —плюрирегулярные компакты, $X=(D \times F) \cup (E \times G)$ и S —аналитическое множество в $D_1 \times G_1$. Пусть функция $f=f(z, w)$ голоморфна в области $(D_1 \times G_1) \setminus S$. Предположим, что при любом фиксированном $(a, b) \in E \times F$

а) функция $f(a, w)$ продолжается в область G до голоморфной функции с аналитическим множеством особенностей;

б) функция $f(z, b)$ продолжается в область D до голоморфной функции с аналитическим множеством особенностей.

Тогда f голоморфно продолжается в $\Omega \setminus \bar{S}$, где Ω —оболочка голоморфности X , а $\bar{S}$ —аналитическое множество в Ω , причем $\bar{S} \cup (D \times G) \subset S$.

Оболочка голоморфности множества X описывается с помощью экстремальной плюрисубгармонической функции $\omega(\cdot, K, U)$ множества K относительно области $U: \Omega = \{(z, w) \in D \times G: \omega(z, E, D) + \omega(w, F, G) < -1\}$. Аналогичная теорема справедлива и в случае, когда голоморфное продолжение с аналитическими особенностями рассматривается по каждому переменному в отдельности.

Теорема 4. Пусть $D_j \subset \mathbb{C}^2_j$ — область, $E_j \subseteq D_j$ — относительно замкнутое регулярное подмножество и $X = (D_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) \cup \dots \cup \cup (E_1 \times \dots \times E_{n-1} \times D_n)$, $j=1, 2, \dots, n$. Пусть функция $f = f(z_1, \dots, z_n)$ голоморфна в некоторой окрестности U множества $E = E_1 \times \dots \times E_n$ за исключением аналитического в U множества S . Предположим, что при любом фиксированном $a \in E$ функция $f(a_1, \dots, a_{j-1}, z_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$ продолжается в D_j до голоморфной функции с аналитическим множеством особенностей. Тогда f продолжается в оболочку голоморфности Ω множества X до голоморфной функции с аналитическим множеством особенностей $\bar{S}$ и $\bar{S} \cap U \subset S$.

В случае функции с плюриполярными особенностями в условиях теорем 3 и 4, как показали А. Садуллаев и Е. М. Чирка (*), удается лишь доказать, что f продолжается до функции, голоморфной в некоторой окрестности множества X за исключением некоторого плюриполярного замкнутого и плюриполярного множества особенностей. Продолжение в оболочку голоморфности Ω в случае функций с аналитическими особенностями следует из работы Г. Длуски (**), где он доказал, что если функция f голоморфна в некоторой области $D \subset \mathbb{C}^n$ за исключением аналитического в D множества особенностей S , то f продолжается в оболочку голоморфности области D до голоморфной функции с аналитическим множеством особенностей $\bar{S}$, причем $\bar{S} \cap D \subset \bar{S}$ либо $\bar{S} = \emptyset$.

Автор весьма благодарен Е. М. Чирке и А. Садуллаеву за помощь в работе.

ВЦ Госплана
Армянской ССР

Խ. Վ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Բազմարևեռային եզակիություններ ունեցող ֆունկցիաների հոլոմորֆ շարունակության վերաբերյալ

Հոդվածում դիտարկվում են բազմարևեռային եզակիություններ ունեցող ֆունկցիաների հոլոմորֆ շարունակության որոշ հարցեր, երբ այդպիսի շարունակության առկայությունը հայտնի է փոփոխականների մի որևէ խմբով: Հիմնական արդյունքներից մեկը հետևյալն է:

* և որ եթե $f = f(z, w)$ ֆունկցիան հոլոմորֆ է $D \times G \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ տիրույթում բացի $D \times G$ -ում փակ և բազմարևեռային S բազմությունից և $E \subset D$ բազմությունը բազմարևեռային չէ: Ենթադրենք, որ ցանկացած ֆիքսած $a \in E$ կետի համար $f(a, w)$ ֆունկցիան հոլոմորֆ շարունակվում է $\mathbb{C}^m$ բացի որևէ բազմարևեռային եզակիությունների բազմությունից: Այդ դեպքում f -ը հոլոմորֆ շարունակվում է $(D \times \mathbb{C}^m) \setminus \bar{S}$, որտեղ $\bar{S}$ -ը մի

* Как недавно сообщил мне Е. М. Чирка, теорема Длуски справедлива и в случае функций с плюриполярными особенностями. Следовательно, для этих функций справедливы также теоремы 3 и 4.

փակ բազմաբևեռային բազմություն $D \times C_{\mathbb{C}}^m$ -ում, ընդ որում $S \cap (D \times G) = S$.

Բացի դրանից հողվածում բերվում են նաև մի քանի ավելի ընդհանուր արդյունքներ անալիտիկ կապիտոթյուններով ֆունկցիաների հոլոմորֆ շարունակության մասին:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

* В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, Наука, М., 1961. * Б. В. Шабут, Введение в комплексный анализ, Наука, М., 1976. * М. В. Казарян, ДМ АрмССР, т. 76, № 1, с. 13—17 (1983). * А. Садуллаев, Е. М. Чирка, Мат. сб., т. 132(174), № 3, с. 383—390 (1987). * М. В. Казарян, Мат. сб., т. 125(167), № 3 с. 381—398 (1984). * G. Dloussky, Lecture Notes in Mathem., 578, Seminaire P. Leiong p. 217—236, 1975—1976.