ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVII 1988 3

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

Сверхтождества и группы

(Представлено академиком АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 19/IV 1988)

Задача об абстрактном описании мультипликативной группы поля—одна из старых задач алгебры. «Большой проблемой является описание тех групп, которые могут быть мультипликативными группами полей» ([1], с. 379). В настоящей работе с помощью сверхтождеств (предварительные сведения о сверхтождествах см. в ([2])) характеризуется класс мультипликативных групп полей.

Множество всех бинарных операций, определенных на Q, обозначим через F_Q^2 и, следуя Манну ([3]), на этом множестве определим следующую операцию: $A \cdot B(x, y)=A[x, B(x, y)]$, где $A, B \in F_Q^2$, $x, y \in Q$. Множество F_Q^2—моноид относительно этого умножения, в котором совокупность всех обратимых справа операций множества Q образует подгруппу. Операция $E(x, y)=y$—единица полугруппы F_Q^2.

Гомоморфизм $\varphi: \Gamma \to F_Q^2$ из полугруппы Γ в полугруппу F_Q^2 назовем *бинарным представлением полугруппы* Γ. Если задано бинарное представление полугруппы Γ, то элементы из Γ действуют на множестве Q как бинарные операции. Следовательно, множество Q становится бинарной Γ-алгеброй с тождеством $\alpha \cdot \beta(x, y)=\alpha[x, \beta(x, y)]$, называемой бинарным Γ-полигоном. Если эта Γ-алгебра удовлетворяет сверхтождеству $w_1=w_2$, то будем говорить, что исходное представление удовлетворяет этому сверхтождеству.

Если Γ—моноид с единицей $e \in \Gamma$, то в определении его бинарного представления добавляется условие $\varphi(e)=E$, или в соответствующем бинарном Γ-полигоне — условие $e(x, y)=y$.

Пусть Γ—полугруппа. Бинарное представление $\varphi: \Gamma \to F_Q^2$ называется:

1) обратимым справа, если соответствующий бинарный Γ-полигон обратим справа, т. е. для любого $\alpha \in \Gamma$ и для любых $a, b \in Q$ уравнение $\alpha(a, x)=b$ имеет единственное решение $x \in Q$;

2) точным, если гомоморфизм φ—мономорфизм;

3) транзитивным (0-транзитивным), если для любых $a, b, c \in Q$ существует $\alpha \in \Gamma$ такой, что $\alpha(a, b)=c$;

4) 1-транзитивным, если для любых $a, b, c \in Q$, где $a \neq b$, существует $\alpha \in \Gamma$ такой, что $\alpha(a, b)=c$;

5) 2-транзитивным, если для любых $a, b, c \in Q$, где $b \neq a \neq c$, существует $\alpha \in \Gamma$ такой, что $\alpha(a, b)=c$;

6) 3-транзитивным, если для любых попарно неравных элементов $a, b, c \in Q$ существует такой $\alpha \in \Gamma$, что $\alpha(a, b) = c$;

Предложение 1. *Если Γ—группа, тогда любое ее бинарное представление обратимо справа.*

Предложение 2 (бинарная теорема Кели). *Каждая полугруппа имеет точное бинарное представление, удовлетворяющее сверхтождеству* $X(x, y) = X(z, y)$.

Теорема 1. *Моноид является группой тогда и только тогда, когда он имеет точное i-транзитивное* (i—0, 1, 2, *или* 3) *и обратимое справа бинарное представление, удовлетворяющее сверхтождеству левой дистрибутивности*

$$X[x, Y(y, z)] = Y[X(x, y), X(x, z)]. \qquad (d_1)$$

Бинарное представление полугруппы Γ называется регулярным, если оно точно, i-транзитивно ($i=2$ или 3), обратимо справа и удовлетворяет сверхтождеству левой дистрибутивности (d_1).

Следствие 1. *Моноид является группой тогда и только тогда, когда он имеет бинарное регулярное представление.*

Теорема 2. *Моноид является мультипликативной группой некоторого поля тогда и только тогда, когда он имеет бинарное регулярное представление, удовлетворяющее сверхтождеству идемпотентности* $X(x, x) = x$.

Группа Γ называется *сверхидемпотентной* (гиперидемпотентной), если некоторое ее бинарное регулярное представление (существующее согласно следствию 1) удовлетворяет сверхтождеству идемпотентности.

Следствие 2. *Группа является мультипликативной группой некоторого поля тогда и только тогда, когда она сверхидемпотентна.*

Ереванский государственный университет

ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Գերնույնություններ և խմբեր

Դաշտի արտադրյալին խմբի նկարագրության խնդիրը հանրահաշվի ամենահին խնդիրներից մեկն է։ Աշխատանքում ներկայացվում է այդ խնդրի լուծումը գերնույնությունների օգնությամբ։

Սահմանվում է կիսախմբի երկտեղ ներկայացման գաղափարը և այդ ներկայացման երեք հատկությունների օգնությամբ տրվում է խմբի նկարագիրը։ Այնուհետև այդ հատկություններին ավելացնելով ինքնահամընկնման

$$X(x, x) = x$$

գերնույնությունը, ստանում ենք դաշտի արտադրյալին խմբի նկարագիրը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. Фукс.* Бесконечные абелевы группы. Т. 2. Мир, М., 1977. [2] *Ю. М. Мовсисян.* Введение в теорию алгебр со сверхтождествами. Изд-во Ереванского гос. ун-та, 1986. [3] *H. B. Mann*, Bull. Amer. Math. Soc., v. 50, p. 249—257 (1944).