ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXVII 1988 3

УДК 517

МАТЕМАТИКА

Р. В. Даллакян

О нулях аналитических в круге функций, допускающих рост вблизи его границы

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 31/III 1988)

Пусть D —единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ — множество всех голоморфных в D функций. Предположим, что φ — монотонно растущая, неотрицательная функция на $R_+=(0,+\infty)$. С функцией φ свяжем класс

$$X_\varphi^*=\left\{f\in H(D):|f(z)|\leqslant\exp\left[C_f\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right],\quad z\in D\right\}.$$

Если $f\in H(D)$, то символ Z_f будет обозначать множество нулей f в D. Углом Штольца, как обычно, будем называть угол раствора меньше π, с вершиной на единичной окружности, биссектриса которого проходит через центр круга. М. М. Джрбашяном [1] было замечено, что если $\varphi(t)=\ln t$, $f\in X_\varphi^*$, $f\not\equiv 0$ и Z_f находится в некотором угле Штольца, то

$$\sum_{\zeta\in Z_f}(1-|\zeta|)<+\infty. \tag{1}$$

В то же время было установлено [2], что если Z_f не находится в углах Штольца, то для любого $\varphi(t)$: $\varphi(t)\uparrow+\infty$, $(t\to\infty)$ существует функция $f\in X_\varphi^*$, $f\not\equiv 0$, такая, что ряд (1) расходится. В дальнейшем Г. Шапиро и А. Шильдс [4] распространили результат [1] на случай $\varphi(t)=t^\alpha$, $0<\alpha<1/2$.

И, наконец, сравнительно недавно [3] было доказано*, что если

$$J=\int_1^{+\infty}\left(\frac{\varphi(t)}{t^3}\right)^{1/2}dt<+\infty,$$

то для произвольного $f\in X_\varphi^*$, $f\not\equiv 0$, нули которого находятся в угле Штольца, выполняется условие (1). Если же $J=+\infty$, то такое утверждение может и не иметь места.

В этой заметке мы исследуем свойства нулей функции класса X_φ^* в том случае, когда $J=+\infty$ и порядок функции φ равен единице, т. е. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}=1$ (*). В том случае, когда порядок функции

* Отметим, что аналогичное утверждение легко следует из результатов работ [6], [7] (см. также [8]).

φ строго больше единицы и конечен, полное описание нулей функции φ класса X_φ^∞ получено в работе [3]. Для формулировки основного результата заметки введем также обозначение $I(x)=$
$=\int\limits_0^x\left(\frac{\varphi\left(\frac{1}{1-t}\right)}{1-t}\right)^{1/2}dt,\ x\in(0,1).$

Теорема. *Пусть φ—монотонно растущая функция первого порядка такая, что* $\int\limits_1^\infty\left(\frac{\varphi(t)}{t^3}\right)^{1/2}dt=+\infty$ и существует $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}-\right.$
$\left.-1\right)\ln x.$

1. *Предположим, что $Z=\{z_n\}_{n=1}^\infty$ находится в некотором угле Штольца. Тогда, если*

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1-|z_n|}{[I(|z_n|)]^2}<+\infty, \tag{2}$$

то существует функция $f(z)$, $f(z)\not\equiv 0$ из класса X_φ^∞, такая, что $Z_f=\{z_n\}$.

2. *И обратно, если $f(z)\in X_\varphi^\infty$, $f(z)\not\equiv 0$ и $\{z_n\}$ находится в конечных числах углов Штольца, то для любого натурального числа m и для любого a, $a>1$, выполняется следующее условие:*

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1-|z_n|}{[I(|z_n|)]^2\cdot\prod\limits_{j=1}^{m-1}\ln_j I(|z_n|)\cdot[\ln_m I(|z_n|)]^a}<+\infty,$$

где $\ln_j x=\ln(\ln_{j-1}x)$, $(j\geqslant 2)$ $\ln_0 x=1$, $\ln_1 x=\ln x$.

Доказательство теоремы основано на следующих вспомогательных утверждениях:

Лемма 1. *Пусть* $J(x)=\int\limits_1^x\left(\frac{\varphi(t)}{t^3}\right)^{1/2}dt$, *где φ—монотонно растущая функция первого порядка, такая, что* $\int\limits_1^\infty\left(\frac{\varphi(t)}{t^3}\right)^{1/2}dt=+\infty$,

тогда

1) *если* $\left(\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}-1\right)\ln x_{x\to\infty}\to C>-2$, *то*

$$J(x)\sim\frac{2}{C+2}\cdot\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)^{1/2}\ln x,\quad (x\to+\infty)$$

2) *если* $\left(\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}-1\right)\ln x\to+\infty$, *при* $x\to\infty$ *то*

$$J(x)\sim 2\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)^{1/2}\left(\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}-1\right)^{-1},\ (x\to+\infty).$$

Лемма 2. *Пусть φ—монотонно растущая неотрицательная функция первого порядка и* $F(x)=\int^{x}(\varphi(e^{y})e^{-y})^{1/2}dy$. *Тогда, если* $\left(\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}-1\right)\ln_x^{1/2}\leq C$, *то*

$$F(x)\leq C_1F(x-2\ln F(x)-C).$$

Наметим ход доказательства теоремы. Легко видеть, что, не ограничивая общность, можно предполагать, что множество Z находится на радиусе $(0, 1)$. Для доказательства первой части теоремы рассмотрим случай, когда $\left(\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}-1\right)\ln^{1/2}x\leq C$.

Пусть $\theta(S)$—непрерывная функция на $-\infty<S<+\infty$, причем

$$\theta(S)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\left(1-2\cdot\left(\frac{F'(S)}{F(S)}\right)^{-1}\right. & \text{при } S>S_0\\ \pi/2 & \text{при } S\leq S^*\\ \text{дифференцируемая функция} & \text{при } S^*<S<S_0\end{cases}$$

$S_0\neq S^*$ некоторые точки на оси S. Далее, пусть

$$\Pi=\left\{\xi=\sigma+i\tau:|\tau|<\frac{\pi}{2},\ -\infty<\sigma<+\infty\right\},$$

$$\Omega=\{\zeta=S+it:|t|<\theta(S),\ -\infty<S<+\infty\}.$$

Предположим, что $\xi=\phi_1(\zeta)$ конфортно отображает Ω на Π, тогда из теоремы Альфорса ([8]) и из леммы 2 следует, что существуют постоянные C_2 и C_3 такие, что

$$\frac{C_2}{(F(\sigma))^2}<l^{\sigma-s}<\frac{C_3}{(F(\sigma))^2}.$$

Пусть $\xi=\ln\frac{1+z}{1-z}$, где выбрана главная ветвь логарифма, $\zeta=\phi_1^{-1}(\xi)$, $w=\frac{e^{\zeta}-1}{e^{\zeta}+1}$. Суперпозицию этих конформных отображений обозначим через $\phi(z)$. Легко видеть, что $w=\phi(z)$ отображает единичный круг z плоскости на некоторую область G w-плоскости, причем $G\supset D$. Из (3) и из вида конформного отображения $w=\phi(z)$ можно получить следующие оценки:

$$\frac{C_4\cdot|1-z|}{\left(F\left(\ln\frac{1}{|1-z|}\right)\right)^2}<|1-w|<\frac{C_5\cdot|1-z|}{\left(F\left(\ln\frac{1}{|1-z|}\right)\right)^2}. \tag{4}$$

Отсюда нетрудно вывести неравенство

$$|1-w|>C_6\cdot\left(\frac{1-|z|}{\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}\right)^{1/2}\cdot\left(F\left(\ln\frac{1}{1-|z|}\right)\right)^{-1},\ z\in D\setminus\Gamma, \tag{5}$$

где $\Gamma=\{z:z=\Phi^{-1}(w),\ w\in D\}$. Теперь докажем, что функция $f(z)=B(\Phi(z))$, где

$$B(w)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_n-w}{1-\rho_n w} \quad \text{и} \quad \rho_n=\Phi(r_n)$$

есть искомая нами функция. Пользуясь (4), можно получить следующее неравенство:

$$\ln|B(w)|\leqslant 2\cdot \operatorname{Re}\frac{w+1}{w-1}\sum_{n=1}^{\infty}(1-\rho_n),\quad w\in G\setminus D. \tag{6}$$

Исходя из (2) и (3) легко доказать, что $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\rho_n)<+\infty$. Отсюда, учитывая (5), нетрудно получить следующую оценку:

$$\ln|B(w)|\leqslant C_7\cdot e^s\cdot\frac{F'(s)}{F(s)},\quad w\in G\setminus D. \tag{7}$$

Теперь, используя лемму 1, учитывая оценку (7), можно показать справедливость следующего неравенства:

$$\ln|B(\Phi(z))|\leqslant C_8\cdot\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right),\quad z\in D\setminus\Gamma.$$

Для остальных z, $z\in D$, указанное неравенство следует из того, что $B(w)$ есть произведение Бляшке.

Теперь предположим $\left(\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}-1\right)\ln^{1/2}x_{x\to\infty}\to+\infty$. В этом случае мы используем произведения М. М. Джрбашяна $\pi_\alpha(z, z_n)$ (см. [1]):

$$\pi_\alpha(z, z_n)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left\{-\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)^\alpha\ln\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{r_n}\right|}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}\right\},\quad z\in D.$$

Как установлено [1], указанные произведения равномерно сходятся внутри D, если $\sum(1-|z_k|)^{\alpha+2}<+\infty$. Учитывая лемму 1.2 работы [5] и полагая $\alpha>2$, получим

$$\ln|\pi_\alpha(z, r_n)|\leqslant \text{const}\cdot\sum_{n=1}\left|\frac{1-r_n^2}{1-r_n z}\right|^{\alpha+2}.$$

В дальнейшем, разбивая эту сумму на два слагаемых, получим

$$\ln|\pi_\alpha(z, r_n)|\leqslant\text{const}\left(\sum_{1-(1-r_n)[J(r_n)]^{2/\alpha+1}<|z|}\left(\frac{1-r_n}{1-r_n|z|}\right)^{\alpha+2}+\sum_{1-(1-r_n)[J(r_n)]^{2/(\alpha+1)}\geqslant|z|}\left(\frac{1-r_n}{1-r_n|z|}\right)^{\alpha+2}\right)=$$

$$=I_1+I_2.$$

После этого, приводя несложные выкладки, получим:

$$I_j\leqslant\text{const}\cdot\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right),\quad j=1, 2.$$

Этим первая часть теоремы доказана. Для доказательства второй части строится подходящая область $\Omega\subset D$ со следующими свойствами: а) $\partial\Omega\cap\partial D=\{1\}$; б) для любой функции $f\in X_\varphi^*$ функция

$f(\Phi(z))$ имеет конечную характеристику. Здесь Φ—конформное отображение Ω на D.

Отметим, что аналогичные построения приведены в ([3,6,7,8]).

Работа выполнена под руководством Ф. А. Шамояна.

Ереванский
государственный университет

Ռ. Վ. ԴԱԼԱՔՅԱՆ

Շրջանում անալիտիկ. եզրի մոտ ան թույլ աճող ֆունկցիաների զրոների մասին

Աշխատանքում ստացվել է հետևյալ արդյունքը՝

Թեորեմ. Դիցուք φ-ն առաջին կարգի մոնոտոն աճող ֆունկցիա է, այնպիսին, որ $\int_1^{\infty}\left(\frac{\varphi(t)}{t^3}\right)^{1/2}dt=+\infty$ և գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}-1\right)\ln x$:

1. Ենթադրենք $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ գտնվում է Շտոլցի անկյան ներսում: Այդ ժամանակ, երբ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|z_n|}{\left(\int_0^{|z_n|}\left(\frac{\varphi\left(\frac{1}{1-t}\right)}{1-t}\right)^{1/2}dt\right)^2}<+\infty,$$

ապա գոյություն ունի $f(z)$, $f(z)\not\equiv 0$ X_{φ}^{∞} դասից, այնպիսին, որ $f(z_n)=0$:

2. Հակառակը, երբ $f(z)\in X_{\varphi}^{\infty}$, $f(z)\not\equiv 0$ և $\{z_n\}$ գտնվում է վերջավոր քանակությամբ Շտոլցի անկյունների ներսում, ապա ցանկացած բնական m-ի և ցանկացած a-ի համար, $a>1$ տեղի ունի այսպիսի պայման

$$\sum_{n=1}^{\infty}\times$$

$$\times\frac{1-|z_n|}{\left(\int_0^{|z_n|}\left(\frac{\varphi\left(\frac{1}{1-t}\right)}{1-t}\right)dt\right)^2\cdot\prod_{j=0}^{m-1}\ln_j\int_0^{|z_n|}\left(\frac{\varphi\left(\frac{1}{1-t}\right)}{1-t}\right)^{1/2}dt\cdot\left[\ln_m\int_0^{|z_n|}\left(\frac{\varphi\left(\frac{1}{1-t}\right)}{1-t}\right)^{1/2}dt\right]^a}<$$

$$<+\infty:$$

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*. Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР. вып 2, с. 3–48, (1948). [2] *F. Bagemihl, P. Erdos, W. Seidel*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3), v. 70, p. 135–147 (9953). [3] *W. K. Hayman, B. Korenblum*. Michigan Math. J. v. 27 p. 21–30 (1980). [4] *H. S. Shapiro, A. L. Shields*, Math. Z, v. 80, p. 196–216 (1962). [5] *Ф. А. Шамоян*, Изв. АН АрмССР. Мат. т. 13, №5–6, с. 405–422 (1978). [6] *В. И. Мацаев, Е. З. Могульский*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 56, с. 90–104 (1976). [7] *Н. К. Никольский* Тр. Ордена Ленина Мат. ин.-та им В. А. Стеклова, 1974. [8] *L. Ahlfors*, Acta Soc. Sci. Fenn., Nova Series A, v. 1:9 p. 1–40, (1930). [9] *B. Hanson*, Proc. London Math. Coc. (3), v. 51, p. 339–368 (1985).