

УДК 529.3.01

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. З. Петросян

(О двух плоских смешанных задачах теории
 упругости для неоднородной по степенному
 закону полуплоскости

(Представлено чл. корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 11/IV 1988)

Вслед за классическими контактными и смешанными задачами теории упругости, основные результаты исследования которых отражены в (1), особое место в указанной области занимают смешанные задачи, когда на части граничной поверхности упругого однородного изотропного тела заданы компоненты тангенциальных смещений, на остальной части границы — компоненты тангенциальных напряжений, а нормальные напряжения везде на границе равны нулю. Эти задачи будучи связаны с важными для инженерной практики задачами контактного взаимодействия тонких пластин, лишенных изгибной жесткости, с массивными телами, в ряде случаев допускают замкнутые решения. В этом направлении укажем на работы (2-4), а также на монографию (5).

Некоторые задачи из упомянутой области обобщены на случай неоднородного по степенному закону упругого полупространства (6-7). Отметим также работу (8).

В настоящей статье рассматриваются две плоские смешанные задачи указанного типа для полупространства, модуль упругости которого по глубине изменяется по степенному закону и который находится в условиях антиплоской или плоской деформации. К таким двум отдельным задачам сводится соответствующая смешанная краевая пространственная задача для упругого полупространства, модуль упругости которого по глубине изменяется по степенному закону, при прямой линии раздела граничных условий и при надлежащем нагружении.

1. Пусть упругое полупространство $z \leq 0$, отнесенное к правой прямоугольной системе координат O_{xyz} , обладает изменяющимся по глубине по степенному закону модулем упругости $E = E_0 |z|^p$ ($0 \leq p < 1$) и постоянным коэффициентом Пуассона μ . Пусть далее на границе этого полупространства имеется совокупность взаимно непересекающихся полос

$$\Omega = \left\{ z = 0; \bigcup_{k=1}^N [a_k \leq x \leq b_k], -\infty < y < \infty \right\} \quad (a_{k-1} < b_{k-1} < a_k \quad k = 2, 3, \dots, N, \\ b_N > a_N)$$

и полупространство подвержено воздействию таких силовых факторов или поля смещений, что находится в условиях антиплоской деформации в направлении оси O_z с базовой плоскостью O_{xz} или в условиях плоской деформации опять с той же самой базовой плоскостью. Эти два состояния, как хорошо известно, отделяются друг от друга, и их можно рассматривать отдельно.

Сначала рассмотрим антиплоскую деформацию полупространства Π , обозначив через $L = \{z=0; \bigcup_{k=1}^N [a_k, b_k]\}$ след в плоскости O_{xz} совокупности областей Ω , для полуплоскости $\Pi = \{z \leq 0; -\infty < x < \infty\}$ рассмотрим следующую смешанную краевую задачу:

$$\begin{aligned} u_z(x, z)|_{z=0} &= f(x) \quad (x \in L); \quad \tau_{xz}(x, z)|_{z=0} = 0 \quad (x \in L'); \\ \sigma_z(x, z)|_{z=0} &= 0 \quad (x \in R) \quad (L' = R/L; \quad R = \{z=0; -\infty < x < \infty\}); \\ \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 &\rightarrow 0 \quad (x^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad (x, z) \in \Pi). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u_z — компонент смещения вдоль оси O_z , а $f(x)$ — наперед заданная функция смещений на L .

Выведем разрешающее интегральное уравнение задачи (1.1) относительно неизвестных тангенциальных напряжений $\tau(x)$, действующих на L . Приняв во внимание известное выражение функции влияния для разбираемого случая (^{9,10}), сразу приходим к интегральному уравнению

$$\int_L \frac{\tau(s) ds}{|x-s|^2} = A_0^{-1} f(x) \quad (x \in L), \quad (1.2)$$

$$A_0 = 2(1+\mu)\Gamma(1+\nu/2)\{\sqrt{\pi}E_0\Gamma[(1+\nu)/2]\}^{-1},$$

где $\Gamma(x)$ — известная гамма-функция Эйлера.

Если теперь уравнение (1.2) представить в виде

$$A_0 \left| \int_L \frac{|x-s|^{-\nu-1} - 1}{\nu} \tau(s) ds + \frac{1}{\nu} \int_L \tau(s) ds \right| = f(x)$$

и совершить предельный переход $\nu \rightarrow 0$, то учитывая, что $(a^\nu - 1)/\nu \rightarrow -\ln a$ ($a > 0$), после дифференцирования обеих частей полученного равенства, чтобы избавиться от бесконечной постоянной в известной задаче Фламана, из (1.2) получим следующее интегральное уравнение:

$$\int_L \frac{\tau(s) ds}{s-x} = A_0^{-1} f(x) \quad (x \in L, \quad A_0 = 2(1+\mu)/\pi E_0)$$

для поставленной задачи (1.1) в случае обычного однородного полупространства, находящегося в условиях антиплоской деформации.

Обратимся теперь к случаю плоской деформации полупространства и для полуплоскости Π рассмотрим такую смешанную краевую задачу:

$$u_z(x, z)|_{z=0} = f(x) \quad (x \in L); \quad \tau_{xz}(x, z)|_{z=0} = 0 \quad (x \in L'). \quad (1.3)$$

$$\sigma_z(x, z)|_{z=0} = 0 \quad (x \in R); \quad \sigma_z^2 + \sigma_x^2 \rightarrow 0, \quad \sigma_z \rightarrow 0 \quad (x^2 + z^2 \rightarrow \infty \quad (x, z) \in \Pi).$$

На основании известных результатов из (2.10) решение задачи (1.3) сведем к решению следующего интегрального уравнения:

$$\int_L \frac{\tau(s) ds}{|x-s|} = K_0^{-1} f(x) \quad (K_0 = 0_0^{1/2}; \quad x \in L). \quad (1.4)$$

Здесь $0_0^{1/2}$ — определенная комбинация упругих постоянных полупространства, приведенная в (2.10).

Таким образом, поставленные смешанные краевые задачи и в случае антиплоской деформации, и в случае плоской деформации математически описываются, с точностью до постоянного коэффициента, одним и тем же интегральным уравнением (1.2) или (1.4).

2. Далее задачи (1.1) и (1.3) будем рассматривать в случаях: 1) $L = \{z=0; -a < x < a\}$; 2) $L = \{z=0; x > 0\}$.

В первом случае уравнение (1.2) примет вид

$$\int_{-a}^a \frac{\tau(s) ds}{|x-s|} = A_0^{-1} f(x) \quad (-a < x < a). \quad (2.1)$$

Если на участке $[-a, a]$ задана равнодействующая тангенциальных напряжений, то будем иметь условие

$$\int_{-a}^a \tau(s) ds = T. \quad (2.2)$$

Теперь в уравнении (2.1) и в условии (2.2) перейдем к безразмерным координатам

$$t = x/a, \quad u = s/a$$

и безразмерным величинам

$$\varphi(t) = E_0^{-1} \tau(at), \quad g(t) = a^{-1} f(at), \quad 0 = (E_0 A_0)^{-1} a^2, \quad T_0 = (a E_0)^{-1} T. \quad (2.3)$$

В результате уравнение (2.1) перейдет в уравнение

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(u) du}{|t-u|} = 0 g(t) \quad t \in (-1; 1), \quad (2.4)$$

а условие (2.2) — в условие

$$\int_{-1}^1 \varphi(u) du = T_0 \quad (2.5)$$

Решение уравнения (2.4) представим в форме бесконечного ряда

$$\varphi(t) = (1-t^2)^{(-1)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n C_n^{(-1/2)}(t) \quad t \in (-1; 1), \quad (2.6)$$

где $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, а

$C_n^{v/2}(t)$ — полиномы Гегенбауэра. Далее (2.6) подставим в (2.4) и воспользуемся известным спектральным соотношением ^(9,10), а также условием ортогональности полиномов Гегенбауэра. В результате найдем

$$\varphi_n = 0, g_n / \lambda_n^{(v)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad \lambda_n^{(v)} = \pi(v)_n \left(\cos \frac{1}{2} \pi v + n! \right)^{-1}; \quad (2.7)$$

$$g_n = \frac{n!(2n+v)! \Gamma(v/2)^2}{\pi 2^{2+v} \Gamma(v+n)} \int_{-1}^1 g(u) (1-u^2)^{v-1/2} C_n^{v/2}(u) du.$$

В частном случае, когда $g(t) = \delta_0$, согласно условию (2.5) и равенствам (2.7) придем к соотношению

$$T_0 = 0 \cos \frac{1}{2} \pi v \Gamma((v+1)/2) \left[\sqrt{\pi} \Gamma(1+v/2) \right]^{-1} \delta_0.$$

Воспользовавшись известным результатом ⁽¹¹⁾, на основании (2.7) можем определить смещение $u_v(x, 0)$ при $|x| > 0$. После перехода к безразмерным величинам и несложных преобразований будем иметь

$$u_v^n(t) = \frac{1}{v} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \lambda_n [H(t) + (-1)^n H(-t)] (|t| - \sqrt{t^2 - 1})^{n+v}.$$

$$\cdot F(v/2, n+v; n+1+v/2; 2t^2 - 2|t|\sqrt{t^2 - 1} - 1) \quad (|t| > 1);$$

$$u_v^n(t) = u_v(at, 0)/a; \quad \varphi_n = \frac{\sqrt{\pi} 2^v \Gamma((1+v)/2) \Gamma^2(n+v)}{\Gamma^2(v) n! \Gamma(n+1+v/2)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где $H(t)$ — известная функция Хевисайда, а $F(z, \beta; \gamma; t)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Во втором случае уравнение (1.2) после введения величин (2.3) преобразуется в следующее уравнение:

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(u) du}{|t-u|^v} = 0, g(t) \quad (t \in (0; \infty)). \quad (2.8)$$

Решение уравнения (2.8) представим в виде интеграла

$$\varphi(t) = t^{x/2} \int_0^{\infty} J_x(x\sqrt{t}) \Phi(x) dx \quad t \in (0; \infty), \quad (2.9)$$

где $x = (v-1)/2$, $J_x(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка x , а $\Phi(x)$ — неизвестная функция, подлежащая определению. Подставив (2.9) в уравнение (2.8) и воспользовавшись спектральным соотношением ⁽¹²⁾, а также формулой обращения Ханкеля, находим

$$\Phi(x) = 0 - \frac{\Gamma(v) \cos\left(\frac{1}{2} \pi v\right)}{\pi 2^{2+v} x^{v-2}} \int_0^{\infty} t^{v/2} g(t) J_x(\sqrt{t}) dt \quad (v > 0). \quad (2.10)$$

При этом на основании ⁽¹²⁾

$$a_v^0(t) = \frac{1}{v} \cdot \frac{(-t)^{-1/2}}{2^{v-1}\Gamma(v)} \int_0^\infty \Phi(x)x^{2v}K_v(x\sqrt{-t})dx, \quad (t < 0),$$

где $K_v(t)$ — известная функция Макдональда.

Таким образом, решение интегрального уравнения дается формулами (2.9) и (2.10).

Автор благодарит С. М. Мхитаряна за постановку задачи и ценные указания.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Ս. Զ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Աստիճանային օրենքով անհամասեռ կիսատարրության համար
առաձգականության տեսության երկու հարց խառը
Եզրային ինդիցենսի մասին

Կիսատարածության տիրույթի համար, որի առաձգականության մոդուլը
ըստ խորության փոփոխվում է աստիճանային օրենքով և որը գտնվում է
հարթ կամ հակահարթ ղեֆորմացիոն պայմաններում, դիտարկվում են երկու
հարթ խառը եզրային ինդիցենս, երբ կիսահարթության եզրագծի որոշ ին-
տերվալների համախմբի վրա տրված են հորիզոնական ուղղությամբ տեղա-
փոխությունների բաղադրիչները, իսկ մնացած մասի վրա շոշափող լարման
բաղադրիչը հավասար է զրոյի, ընդ որում լարումների նորմալ բաղադրիչը
կիսահարթության եզրագծի վրա ամենուրեք հավասար է զրոյի:

Գեղենքաուերի օրթոգոնալ բաղմանդամների մաթեմատիկական մեթոդի
և Բեսելի ֆունկցիաներ պարունակող սպեկտրալ ինտեգրալ առնչությունների
օգնությամբ նշված ինդիցենսը նկարագրող ինտեգրալ հավասարումների լու-
ծումները կառուցվում են փակ ձևով՝ շարքերի և ինտեգրալ բանաձևերի տես-
քերով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976.
- ² Р. Уэстмен, Прикл. мех. Тр. амер. о-ва инж. мех., сер. Е, т. 32, № 2, с. 178—185 (1965).
- ³ В. М. Александров, А. С. Соловьев, Изв. АН СССР, МТТ, № 2, с. 135—139, 1966.
- ⁴ В. Л. Abramian, Proc. Symp. II TAM, "The Mechanics of the Contact Between Deformable Bodies", Delft Univ. Press, p. 84—95, 1975.
- ⁵ Я. С. Уфлянд, Интегральные преобразования в задачах теории упругости, Наука, Л., 1968.
- ⁶ С. М. Мхитарян, С. З. Петросян, Аннотации докладов VI Всесоюзного съезда по теор. и прикл. мех., Ташкент, 1986.
- ⁷ С. М. Мхитарян, С. З. Петросян, Тезисы докладов II Всесоюзной конф. по механике неоднородных структур, Львов, 1987.
- ⁸ С. М. Мхитарян, С. З. Петросян, ДАН АрмССР, т. 82, № 1, с. 38—32 (1986).
- ⁹ Г. Я. Полов, Контактные задачи для линейно-деформируемого основания, Виша школа Киев—Одесса, 1982.
- ¹⁰ Г. Я. Полов, Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений, Наука, М., 1982.
- ¹¹ С. М. Мхитарян, ПММ, т. 47, вып. 2, с. 219—227, (1983).
- ¹² С. М. Мхитарян, Изв. АН СССР, МТТ, № 1, с. 63—72, 1983.