

УДК 529.3.01

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. Мхитарян, С. З. Петросян

Об одной смешанной краевой задаче для полупространства с
 круговой линией раздела граничных условий

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 9/III 1988)

Многие результаты исследований обширных классов смешанных краевых задач теории упругости с круговыми или эллиптическими линиями раздела граничных условий отражены в (1-3). В этом направлении укажем также на работы (4-8), в которых получены замкнутые решения рассматриваемых смешанных задач.

В настоящей статье приводится замкнутое решение одной смешанной краевой задачи для упругого неоднородного по степенному закону полупространства с круговой линией раздела граничных условий.

1. Пусть упругое полупространство $z \leq 0$, отнесенное к правой цилиндрической системе координат (r, ϑ, z) , обладает изменяющимся по глубине по степенному закону $E = E_0 |z|^\nu$ ($0 \leq \nu < 1$) модулем упругости и постоянным коэффициентом Пуассона. Для него рассмотрим следующую смешанную краевую задачу:

$$\begin{aligned} u_r(r, \vartheta, z)|_{z=0} &= f(r, \vartheta), \quad u_\vartheta(r, \vartheta, z)|_{z=0} = g(r, \vartheta) \quad ((r, \vartheta) \in \omega), \\ \tau_{rz}(r, \vartheta, z)|_{z=0} &= \tau_{\vartheta z}(r, \vartheta, z)|_{z=0} = 0 \quad ((r, \vartheta) \in \Pi/\omega); \\ \sigma_z(r, \vartheta, z)|_{z=0} &= 0 \quad ((r, \vartheta) \in \Pi); \quad u_r, u_\vartheta, u_z \rightarrow 0 \quad (r^2 + z^2 \rightarrow \infty); \\ \Pi &= \{z = 0; r^2 + z^2 \geq 0\}; \quad \omega = \{z = 0; r \leq a\}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u_r, u_ϑ, u_z — компоненты смещений, а $f(r, \vartheta)$ и $g(r, \vartheta)$ — наперед заданные функции на круге ω .

На основании известных выражений функций влияния для указанного типа неоднородного полупространства (2, 3) и при помощи разложения компонентов напряжений и смещений в ряды Фурье по ϑ , ограничиваясь при этом соответствующими гармониками с номером m ($m = 1, 2, \dots$), после некоторых преобразований решение краевой задачи (1.1) сведем к решению следующей системы интегральных уравнений:

$$\int_0^1 W_{m+1, m-1}^{(1)}(\bar{r}, \bar{\rho}) \bar{\varphi}_m(\bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} + \bar{\vartheta}_m \int_0^1 W_{m+1, m+1}^{(1)}(\bar{r}, \bar{\rho}) \bar{\varphi}_m(\bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} = \bar{f}_m(\bar{r});$$

$$(\bar{r} < 1; m = 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

$$\bar{\varphi}_m(\bar{\rho}) = \int_0^1 W_{m-1, m-1}^{x+1}(\bar{r}, \bar{\rho}) \bar{\varphi}_m(\bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} + \int_0^1 W_{m-1, m-1}^{x+1}(\bar{r}, \bar{\rho}) \bar{\psi}_m(\bar{\rho}) \bar{\rho} d\bar{\rho} = \bar{g}_m(\bar{r}).$$

Здесь введены обозначения

$$W_{m,n}^{x+1}(r, \rho) = \int_0^1 J_m(tr) J_n(t\rho) t^{2x+1} dt; \quad x = (\nu - 1)/2;$$

$$\bar{\varphi}_\pm = \varphi_\pm / \vartheta_\pm = A_\pm^+ / A_\pm^-; \quad \vartheta_\pm = (1 \pm x) \vartheta_\pm \gamma^{-1} 2^{-2x-1} \Gamma(-x) A_\pm^\pm; \quad (1.3)$$

$$\varphi_m(r) = p_m(r) - q_m(r); \quad \psi_m(r) = p_m(r) + q_m(r)$$

и безразмерные величины

$$\bar{r} = r/a, \quad \bar{\rho} = \rho/a; \quad \bar{\varphi}_m(\bar{r}) = \varphi_m(r)/E_0; \quad \bar{\psi}_m(\bar{r}) = \psi_m(r)/E_0;$$

$$\bar{f}_m(\bar{r}) = (2\vartheta_\pm E_0 a^{1-x})^{-1} [f_m^*(a\bar{r}) + g_m^*(a\bar{r})]; \quad (1.4)$$

$$\bar{g}_m(\bar{r}) = (2\vartheta_\pm E_0 a^{1-x})^{-1} [f_m^*(a\bar{r}) - g_m^*(a\bar{r})].$$

Отметим, что в (1.3) ядро $W_{m,n}^{x+1}(r, \rho)$ — известный интеграл Вебера — Сонина, где $J_n(r)$ — функция Бесселя первого рода, $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера) а постоянные γ , $\vartheta_\pm$, $\vartheta_\pm^\pm$, $A_\pm^\pm$ — известные комбинации упругих постоянных полупространства, выражения которых приведены в (2.3). Кроме того, в (1.3) и (1.4) функции $p_m(r)$ и $q_m(r)$ — амплитуды m -ых гармоник в разложениях в ряды Фурье радиальных ($p(r, \vartheta)$) и окружных ($q(r, \vartheta)$) искомым напряжений в области круга ω , причем $\tau_{rz}(r, \vartheta, 0) = p(r, \vartheta)$, $\tau_{\theta z}(r, \vartheta, 0) = q(r, \vartheta)$, а функции $f_m^*(r)$ и $g_m^*(r)$ — амплитуды m -ых гармоник в разложениях в ряды Фурье функций смещений $f(r, \vartheta)$ и $g(r, \vartheta)$ в радиальном и окружном направлениях соответственно.

2. Опускаем далее черточки в (1.2) и его решение представим в виде бесконечных рядов

$$\bar{\varphi}_m(r) = r^{m-1} (1 - r^2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} X_n^{(m)} P_n^{(m-1,1)}(1 - 2r^2), \quad (2.1)$$

$$\bar{\psi}_m(r) = r^{m+1} (1 - r^2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{(m)} P_n^{(m+1,1)}(1 - 2r^2) \quad (0 < r < 1) \quad (2.2)$$

с неизвестными коэффициентами $X_n^{(m)}$ и $Y_n^{(m)}$, где $P_n^{(a,b)}(z)$ — многочлены Якоби. Положим также

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^{(1-m)/2} f_m\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(m)} P_n^{(m,1)}(x); \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^{(1-m)/2} g_m\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(m)} P_n^{(m,1)}(x) \quad (x = 1 - 2r^2) \quad (2.4)$$

Подставляя (2.1) — (2.4) в систему (1.2) и воспользовавшись известными спектральными и родственными с ним соотношениями (2.4.10), после вычисления некоторых интегралов и преобразований придем к следующей системе линейных конечно-разностных уравнений первого порядка:

$$U_{n+1}^{(m)} + \bar{U}_n V_n^{(m)} = \frac{n}{m+n} [U_n^{(m)} + \bar{U}_n V_{n-1}^{(m)}] = f_n^{(m)};$$

$$\bar{U}_n U_n^{(m)} + V_{n-1}^{(m)} = \frac{n+x+1}{m+n+x+1} [\bar{U}_n U_{n+1}^{(m)} + V_n^{(m)}] = g_n^{(m)} - \delta_n K_m^x \quad (2.5)$$

$$(m=1, 2, \dots; n=0, 1, 2, \dots),$$

где приняты обозначения

$$U_n^{(m)} = 2^{2n} \frac{\Gamma(m+n+x+1)\Gamma(n+x+1)}{[(m+n-1)!n!(2n+m+x)]^{-1}} X_{n-1}^{(m)}; \quad (2.6)$$

$$V_{n-1}^{(m)} = 2^{2n} \frac{\Gamma(m+n+x+1)\Gamma(n+x)}{[(m+n-1)!(n-1)!(2n+m+x)]^{-1}} Y_{n-1}^{(m)};$$

$$Y_{-1}^{(m)} = V_{-1}^{(m)} = 0; \quad \delta_0 = 1, \quad \delta_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

а K_m^x — некоторая постоянная, выражающаяся через коэффициенты $Y_n^{(m)}$ и определяемая ниже.

Построим замкнутое решение системы (2.5), для чего положим

$$U_n^{(m)} + \bar{U}_n V_{n-1}^{(m)} = W_n^{(m)},$$

$$\bar{U}_n U_n^{(m)} + V_{n-1}^{(m)} = Z_n^{(m)} \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (2.7)$$

В результате (2.5) сведем к следующим двум отдельным системам линейных конечно-разностных уравнений первого порядка:

$$W_{n+1}^{(m)} = \frac{n}{m+n} W_n^{(m)} = f_n^{(m)}; \quad (2.8)$$

$$Z_n = \frac{n+x+1}{m+n+x+1} Z_{n+1} = g_n^{(m)} - \delta_n K_m^x \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (2.9)$$

Далее, следуя известной процедуре решения конечно-разностных уравнений первого рода (¹⁰⁻¹¹), решения (2.8) и (2.9) представим соответственно в виде

$$W_n^{(m)} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \sum_{k=0}^{n-1} f_k^{(m)} \Gamma(m+k+1) [\Gamma(k+1)]^{-1} \quad (n=1, 2, \dots); \quad (2.10)$$

$$Z_n^{(m)} = - \frac{\Gamma(m+n+x+1)}{\Gamma(n+x+1)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} g_k^{(m)} \Gamma(k+x+1) [\Gamma(m+k+x+1)]^{-1} - \right. \\ \left. - \Gamma(x+1) [\Gamma(m+x+1)]^{-1} [Z_0^{(m)} + K_m^x] \right\} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Отметим, что коэффициент $Z_0^{(m)}$ в (2.11), причем согласно (2.7) $Z_0^{(m)} = \bar{U}_0 U_0^{(m)} = \bar{U}_0 W_0^{(m)}$, как постоянная интегрирования уравнений (2.9) пока не определен. С целью определения этого коэффициента заметим, что на основании известной асимптотической формулы Дарбу для многочленов Якоби (¹²) для равномерной сходимости рядов (2.1) — (2.2) на отрезке $[z, 1-\varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) достаточно, чтобы $X_n^{(m)}, Y_n^{(m)} = O(n^{-1/2-\delta})$ ($\delta > 0, n \rightarrow \infty$), что накладывает соответствующие ограничения на коэф-

коэффициенты $f_n^{(m)}, g_n^{(m)}$. Отсюда при помощи (2.6) – (2.7) вытекает, что должны потребовать, чтобы $W_n^{(m)}, Z_n^{(m)} = 0$ при $n \rightarrow \infty$. Приняв во внимание последнее обстоятельство, из (2.11) находим

$$\begin{aligned} Z_0 &= -C_m + \frac{\Gamma(m+x+1)}{\Gamma(x+1)} (1+E_m^x) \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(m)} \frac{\Gamma(k+x+1)}{\Gamma(m+x+1)}; \\ C_m &= \frac{\bar{\vartheta}_x}{\bar{\vartheta}_x^2-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)} L_{m,n}^x M_{m,n}^x + \frac{g_0^{(m)}}{\bar{\vartheta}_x^2-1} \cdot \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(m+x+1)} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+n+x+2)}{\Gamma(n+x+2)} L_{m,n}^x + \frac{1}{\bar{\vartheta}_x^2-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+n+x+2)}{\Gamma(n+x+2)} L_{m,n}^x N_{m,n}^x; \\ M_{m,n}^x &= \sum_{k=0}^n f_k^{(m)} \frac{\Gamma(m+k+1)}{\Gamma(k+1)}; \quad N_{m,n}^x = \sum_{k=1}^n g_k^{(m)} \frac{\Gamma(k+x+1)}{\Gamma(m+k+x+1)}; \\ E_m^x &= \frac{1}{\bar{\vartheta}_x^2-1} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(m+x+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+n+x+2)}{\Gamma(n+x+2)} L_{m,n}^x; \quad L_{m,n}^x = \\ &= (-1)^n \frac{2n+m+x+2}{m+n+1} \cdot \{\Gamma(n+x+1) [(m+n+x+1)(n+1)! \Gamma(x)]^{-1} - \\ &\quad - 4\pi^{-1} \sin(\pi x) D_{m,n}^x\}; \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$D_{m,n}^x = 4^{-1} \int_1^{\infty} Q_n^{(x,m+1)}(u) du \quad (m=1, 2, \dots; n=0, 1, 2, \dots), \text{ где}$$

$Q_n^{(x,m)}(u)$ – функции Якоби второго рода ⁽¹²⁾. При этом будем иметь

$$K_m^x = (C_m^x - E_m^x Z_0^m) / (1 + E_m^x). \quad (2.13)$$

Теперь, воспользовавшись (2.7) и (2.20) – (2.13), окончательно получим

$$U_n^{(m)} = -\frac{1}{\bar{\vartheta}_x^2-1} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} M_{m,n-1}^x + \frac{\bar{\vartheta}_x}{\bar{\vartheta}_x^2-1} \frac{\Gamma(m+n+x+1)}{\Gamma(n+x+1)} \times \quad (2.14)$$

$$\times (N_{m,n}^x - N_{m,n-1}^x); \quad U_0^{(m)} = \bar{\vartheta}_x^{-1} Z_0^{(m)} \quad (n=1, 2, \dots);$$

$$\begin{aligned} V_n^{(m)} &= \frac{\bar{\vartheta}_x}{\bar{\vartheta}_x^2-1} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)} M_{m,n}^x - \frac{1}{\bar{\vartheta}_x^2-1} \frac{\Gamma(m+n+x+2)}{\Gamma(n+x+2)} \times \\ &\times (N_{m,n}^x - N_{m,n}^x) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.15)$$

и при помощи (2.14) из (2.15) из (2.6) сразу находим $X_n^{(m)}$ и $Y_n^{(m)}$.

Рассмотрим частный случай, когда $f(r, \vartheta) = \delta \cos \vartheta$, $g(r, \vartheta) = -\delta \sin \vartheta$; $\delta = \text{const}$, что физически соответствует контакту абсолютно жесткого в горизонтальном направлении и абсолютно гибкого в вертикальном направлении круглого диска ω с упругим полупространством, причем этот диск компланарно скреплен с полупространством на его границе и совершает жесткое перемещение вдоль оси ϑ на величину δ . В разбираемом случае $m=1$ и

$$f_1^{(1)}(r) = \delta; \quad g_1^{(1)}(r) = -\delta; \quad f_k^{(1)} = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad g_k^{(1)} = 0 \quad (k=1, 2, \dots);$$

$$K_1=0, \quad g_1^{(0)} = i/10^* E_0 a^{1-\nu}, \quad \psi_1(r) = 0.$$

Следовательно, на основании (2.12) – (2.15) и (2.6) будем иметь

$$U_n^{(0)} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots); \quad V_n^{(0)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad U_0^{(0)} = g_0^{(0)} \bar{u}_0;$$

$$X_0^{(0)} = 2^{1-\nu} \left| \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \right|^{-2} g_0^{(0)} \bar{u}_0, \quad X_n^{(0)} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots); \quad Y_n^{(0)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Учитывая последние формулы и (1.3), получим $(p_1(r) = p_+, \quad q_1(r) = p_-)$

$$p_{\pm}(r) = \pm 2^{-\nu} g_0^{(0)} \bar{u}_0^{-1} \left| \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \right|^{-2} (1-r^2)^{(\nu-1)/2} \quad (0 < r < 1). \quad (2.16)$$

Формулы (2.16) при $\nu=0$ совпадают с известными (3).

В заключение отметим, что при помощи результатов из (16) можно найти смещения граничных точек полупространства вне круга ω . Кроме того, аппроксимируя функции $f_m(r)$ и $g_m(r)$ многочленами и подходящим образом выбирая их коэффициенты, можно обеспечить условия отсутствия концентрации напряжений на крае ω .

Институт механики Академии наук Армянской ССР
Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Ս. Մ. ԽԻՒԹԱՐՅԱՆ, Ս. Չ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Շրջանային զծով բաժանվող սահմանային պայմաններով
կիսատարածության համար մի խառը եզրային խնդրի մասին

Կիսատարածության տիրույթի համար, որի առաձգականության մոդուլը
ըստ խորության փոփոխվում է աստիճանային օրենքով, դիտարկվում է խա-
ռը եզրային խնդիր, երբ այդ տիրույթի եզրային մակերևույթի մի մասի վրա՝ շրջ-
անի տեսքով տրված են տեղափոխությունների հորիզոնական բաղադրիչները,
մակերևույթի մնացած մասի վրա շոշափող լարումների բաղադրիչները հա-
վասար են դրոյի, իսկ նորմալ լարումը մակերևույթի վրա ամենուրեք բացա-
կայում է: Յակոբիի բաղմանդամների մեթոդի օգնությամբ խառը խնդիրը
նկարագրող ինտեգրալ հավասարումների համակարգը բերվում է գծային
վերջավոր տարրերությունների հավասարումների համակարգի: Կառուցված է
վերջինիս փակ լուծումը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976. ² Г. Я. Попов, Контактные задачи для линейно-деформируемого основания, Вища школа, Киев—Одесса, 1982. ³ Г. Я. Попов, Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений, Наука, М., 1982. ⁴ Я. С. Уфлянд, Интегральные преобразования в теории упругости, Наука, Л., 1968. ⁵ В. М. Александров, А. С. Соловьев, Изв. АН СССР, МТГ, № 2, с. 135—139, 1966. ⁶ В. Н. Моссаковский, ПММ, т. 18, вып. 2, с. 187—196 (1954). ⁷ В. L. Abramian, Proc. Symp. IUTAM "The Mechanics of The Contact Between Deformable Bodies", Delft Univ. Press, p. 84—98, 1975. ⁸ Р. Уэстмен, Прикладная механика, Тр. амер. о-ва инж. мех., сер. Е, т. 32, № 2, с. 178—185 (1965). ⁹ С. М. Мхитарян, ПММ, т. 48, вып. 1, с. 105—113 (1984). ¹⁰ А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Физматгиз, М., 1967. ¹¹ А. А. Самарский, Е. С. Уиколаев, Методы решения сеточных уравнений, Наука, М., 1978. ¹² Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, Т. 2, Наука, М., 1974.