

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Ф. Минасян, В. С. Тоноян

Об одной задаче для неоднородной полуплоскости с вертикальным конечным разрезом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 4/IV 1988)

Смешанные задачи для составной плоскости и полуплоскости с трещиной и первая основная задача составной полуплоскости рассмотрены в работах (1-4).

В настоящей работе рассмотрена плоская задача для упругой неоднородной полуплоскости, разрезанной вдоль линии раздела материалов, начиная от горизонтальной границы.

Полуплоскость состоит из двух однородных и изотропных квадрантов с различными упругими свойствами, линия раздела материалов которых перпендикулярна к границе полуплоскости. Разрез имеет конечную длину. На границе полуплоскости и по краям разреза заданы векторы напряжения. Поставленная задача сводится к определению бигармонической функции $\Phi_1(x, y)$ в области правого квадранта и $\Phi_2(x, y)$ в области левого квадранта. Ищем функции $\Phi_l(x, y)$ ($l=1, 2$) в виде суммы двух интегралов Фурье

$$\begin{aligned} \Phi_l(x, y) = & \int_0^{\infty} [A_l(\alpha) + (-1)^{l+1} \alpha x B_l(\alpha)] \exp[(-1)^l \alpha x] \cos(\alpha y) d\alpha + \\ & + \int_0^{\infty} [C_l(\beta) + \beta y D_l(\beta)] \exp[-\beta y] \cos(\beta x) d\beta \end{aligned} \quad (1)$$

при $i=1$, $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$, а при $i=2$, $-\infty < x < 0$, $0 < y < \infty$. Здесь $A_l(\alpha)$, $B_l(\alpha)$, $C_l(\beta)$, $D_l(\beta)$ ($i=1, 2$) неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий и условий полного контакта двух материалов вне разреза. Граничные условия и условия полного контакта двух материалов вне разреза рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)}(x, 0) = f_1(x), \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = f_2(x), \quad 0 < x < \infty; \\ \sigma_y^{(2)}(x, 0) = f_3(x), \quad \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = f_4(x), \quad -\infty < x < 0; \\ \sigma_x^{(1)}(0, y) = \sigma_x^{(2)}(0, y) = \varphi(y), \quad \tau_{xy}^{(1)}(0, y) = \tau_{xy}^{(2)}(0, y) = 0, \quad 0 < y < a; \end{aligned} \quad (2)$$

$$U_1(0, y) = -U_2(0, y), \quad V_1(0, y) = V_2(0, y), \quad a < y < \infty; \quad (3)$$

$$\sigma_r^{(1)}(0, y) = \sigma_r^{(2)}(0, y), \quad \tau_{xy}^{(1)}(0, y) = \tau_{xy}^{(2)}(0, y), \quad a < y < \infty.$$

Используя обычные формулы для напряжения и перемещения, выраженные через бигармоническую функцию $\Phi_1(x, y)$ (3), удовлетворяя условиям (2) и (3) и используя формулы обращения преобразования Фурье, получаем:

$$\beta C_1(\beta) = -\frac{2}{\pi\beta} \int_0^\infty f_1(x) \cos(\beta x) dx + \frac{2}{\pi\beta} \int_0^\infty \frac{x^3 A_1(x)}{x^2 + \beta^2} dx - \frac{2}{\pi\beta} \int_0^\infty x^3 B_1(x) \frac{(x^2 + 3\beta^2) dx}{(x^2 + \beta^2)^2}; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \beta D_1(\beta) = & \frac{2}{\pi\beta} \int_0^\infty f_2(x) \sin(\beta x) dx - \frac{2}{\pi\beta} \int_0^\infty f_1(x) \cos(\beta x) dx + \\ & + \frac{2}{\pi\beta} \int_0^\infty \frac{x^3 A_1(x) dx}{x^2 + \beta^2} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty x^3 B_1(x) \frac{(x^2 + 3\beta^2)}{(x^2 + \beta^2)^2} dx; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \beta C_2(\beta) = & -\frac{2}{\pi\beta} \int_{-\infty}^0 f_3(x) \sin(\beta x) dx + \frac{2}{\pi\beta} \int_0^\infty \frac{x^3 A_2(x) dx}{x^2 + \beta^2} - \\ & - \frac{2}{\pi\beta} \int_0^\infty x^3 B_2(x) \frac{(x^2 + 3\beta^2) dx}{(x^2 + \beta^2)^2}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \beta D_2(\beta) = & -\frac{2}{\pi\beta} \int_{-\infty}^0 f_4(x) \sin(\beta x) dx - \frac{2}{\pi\beta} \int_{-\infty}^0 f_3(x) \sin(\beta x) dx - \\ & - \frac{2}{\pi\beta} \int_0^\infty x^3 A_1(x) \frac{x^2 + 5\beta^2}{(x^2 + \beta^2)^2} dx + \frac{2}{\pi\beta} \int_0^\infty x^3 B_1(x) \frac{x^2 + 3\beta^2}{(x^2 + \beta^2)^2} dx + \\ & + \frac{16}{\pi^2} \beta \int_0^\infty \gamma^3 D_2(\gamma) d\gamma \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{(x^2 + \beta^2)^2 (x^2 + \gamma^2)^2} - \frac{16}{\pi^2} \beta \int_0^\infty \gamma^3 D_1(\gamma) d\gamma \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{(x^2 + \beta^2)^2 (x^2 + \gamma^2)^2} - \\ & - \frac{8}{\pi^2} \beta \int_0^\infty f_2(x) dx \int_0^\infty \frac{x e^{-ax} dx}{(x^2 + \beta^2)^2} + \frac{8}{\pi^2} \beta \int_0^\infty f_4(x) dx \int_0^\infty \frac{x e^{-ax} dx}{(x^2 + \beta^2)^2}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} a^2 A_2(a) = & a^2 A_1(a) - \frac{4}{\pi} a^2 \int_0^\infty \frac{\gamma^3 D_2(\gamma) d\gamma}{(a^2 + \gamma^2)^2} + \frac{4a^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma^3 D_1(\gamma) d\gamma}{(a^2 + \gamma^2)^2} + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_2(x) e^{-ax} dx - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_4(x) e^{-ax} dx; \end{aligned} \quad (8)$$

$$a^2 B_2(a) = 2a^2 A_1(a) - a^2 B_1(a) - \frac{4a^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma^3 D_2(\gamma) d\gamma}{(a^2 + \gamma^2)^2} +$$

$$+ \frac{4a^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\gamma^3 D_2(\gamma) d\gamma}{(a^2 + \gamma^2)^2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_2(x) e^{-ax} dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_4(x) e^{-ax} dx \quad (9)$$

и системы парных интегральных уравнений:

$$\int_0^{\infty} [A_1^*(a)l_1 + B_1^*(a)l_2 - E_1^*(a)] \cos(ay) da = 0, \quad a < y < \infty; \quad (10)$$

$$\int_0^{\infty} [A_1^*(a)l_1 - B_1^*(a)l_2 - E_2^*(a)] \sin(ay) da = 0, \quad a < y < \infty;$$

$$\int_0^{\infty} a A_1^*(a) \cos(ay) da = f(y), \quad 0 < y < a; \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} a [A_1^*(a) - B_1^*(a)] \sin(ay) da = 0, \quad 0 < y < a;$$

где

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{3-\nu_2}{E_2}; & l_2 &= \frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2}; \\ l_3 &= \frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2}; & l_4 &= \frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{1-\nu_2}{E_2}; & aA_1(a) &= A_1^*(a); \\ aA_2(a) &= A_2^*(a); & aB_1(a) &= B_1^*(a); & aB_2(a) &= B_2^*(a); \\ f(y) &= -\varphi(y) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x f_2(x) dx}{x^2 + y^2} + \int_0^{\infty} \gamma^2 (\gamma y - 1) D_1(\gamma) e^{-\gamma y} d\gamma; \\ aE_1^*(a) &= \frac{8a^2}{\pi E_2} \int_0^{\infty} \frac{\gamma^3 D_2(\gamma) d\gamma}{(a^2 + \gamma^2)^2} - \frac{8a^2}{\pi E_2} \int_0^{\infty} \frac{\gamma^3 D_1(\gamma) d\gamma}{(a^2 + \gamma^2)^2} - \\ &\quad - \frac{4}{\pi E_2} \int_0^{\infty} f_2(x) e^{-ax} dx + \frac{4}{\pi E_2} \int_0^{\infty} f_4(x) e^{-ax} dx; \\ aE_2^*(a) &= \frac{4a^2}{\pi E_2} \int_0^{\infty} \gamma D_2(\gamma) \frac{(a^2 + 3\gamma^2) d\gamma}{(a^2 + \gamma^2)^2} - \frac{2a^2}{\pi} \int_0^{\infty} \gamma D_1(\gamma) \left[\frac{2}{E_1} \cdot \frac{1}{a^2 + \gamma^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2l_4 \gamma^2}{(a^2 + \gamma^2)^2} \right] d\gamma - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_2(x) e^{-ax} dx + \frac{2}{\pi} \frac{\nu_2 - 1}{E_2} \int_0^{\infty} f_2(x) e^{-ax} dx - \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \frac{\nu_2 - 1}{E_2} \int_0^{\infty} f_4(x) e^{-ax} dx. \end{aligned}$$

Для решения системы (10) и (11) введем новые неизвестные $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ следующим образом:

$$A_1^*(a)l_1 + B_1^*(z)l_2 - E_1^*(a) = \int_0^a \Phi(t) J_0(zt) dt; \quad (12)$$

$$A_1^*(a)l_1 - B_1^*(a)l_2 - E_2^*(z) = \int_0^a \Psi(t) J_1(zt) dt.$$

Подстановка (12) дает возможность тождественно удовлетворить уравнениям (10). Для удовлетворения уравнениям (11) преобразуем правые части уравнений (12) следующим образом. Заменяя функции $J_0(zt)$ и $J_1(zt)$ на $\cos(ar)$ и $\sin(ar)$ с помощью интегрального представления Пуассона, меняя порядок интегрирования и интегрируя по частям полученные выражения, учитывая при этом, что $H'(a) = 0$; $S'(a) = 0$; $S(0) = 0$, затем решая систему уравнений (12) относительно $aA_1^*(z)$ и $aB_1^*(z)$, подставляя найденное значение $aA_1^*(z)$ и $aB_1^*(z)$ в уравнение (11), продолжая при этом функции $H'(r)$ и $S'(r)$ на интервале $(-a, 0)$ соответственно нечетным и четным образом, получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$S'(y) - \frac{l_2}{\pi l_1} \int_{-a}^a \frac{H'(r)}{r-y} dr = \Psi_1(y); \quad (13)$$

$$H'(y) + \frac{l_1}{\pi l_2} \int_{-a}^a \frac{S'(r)}{r-y} dr = \Psi_2(y),$$

где

$$H'(r) = \frac{2}{\pi} \int_r^a \frac{\Phi(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}; \quad S'(r) = \frac{2}{\pi} r \int_r^a \frac{\Psi(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}. \quad (14)$$

Умножая второе уравнение системы (13) на i и складывая с первым уравнением, получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\chi(y) + \frac{l}{\pi} \cdot \frac{l_2}{l_1} \int_{-a}^a \frac{\chi(r) dr}{r-y} = \Psi(y), \quad (15)$$

где введены обозначения

$$S'(y) + iH'(y) = \chi(y); \quad \Psi_1(y) + i\Psi_2(y) = \Psi(y). \quad (16)$$

Такое уравнение рассматривалось в работах (3,6). Используя результаты работы (6), получаем:

$$\chi(y) = \frac{\Psi(y)}{\mu} - \frac{1}{\mu \pi l (y+a)^{1-m} (y-a)^m} \int_{-a}^a \frac{(r+a)^{1-m} (r-a)^m}{r-y} \Psi(r) dr +$$

$$+ \frac{C}{(y+a)^{1-m}(y-a)^m}; \quad (17)$$

$$m = \frac{1}{2} - i\delta; \quad k = \frac{(1+\nu_1)E_2 + (3-\nu_2)E_1}{(3-\nu_1)E_2 + (1+\nu_2)E_1}; \quad (18)$$

$$\mu = 1 - l_3^2/l_2^2; \quad \delta = \ln k/2\pi;$$

$$\Psi_1(y) = \int_0^{\infty} \gamma D_1(\gamma) W_1(\gamma y) d\gamma + \int_0^{\infty} \gamma D_2(\gamma) W_2(\gamma y) d\gamma + \omega_1(y);$$

$$\Psi_2(y) = \int_0^{\infty} \gamma D_2(\gamma) W_4(\gamma y) d\gamma - \int_0^{\infty} \gamma D_1(\gamma) W_3(\gamma y) d\gamma + \omega_2(y);$$

$$W_1(\gamma y) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l_1(l_2+l_3)\gamma(\gamma y-1)}{l_2} + \left[\frac{4}{\pi E_2} \cdot \frac{l_1(l_2+l_3)}{l_2} \gamma(1-\gamma y) - \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi E_1} + \frac{2}{\pi} \gamma l_4(1-\gamma y) \right] e^{-\gamma y}; \\ W_2(\gamma y) = \left[\frac{4}{\pi E_1} \gamma \gamma^2 - \frac{4}{\pi E_2} \cdot \frac{l_3}{l_1} \gamma(1-\gamma y) \right] e^{-\gamma y}; \quad (19)$$

$$\omega_2(y) = \left(\frac{8}{\pi^2} \frac{\nu_2-1}{E_2} \frac{l_2}{l_3} - \frac{8}{\pi^2 E_2} + \frac{4}{\pi^2} \frac{l_3}{l_2} \right) y \int_0^{\infty} \frac{f_2(x)}{x^2+y^2} dx + \\ + \left(\frac{8}{\pi^2 E_2} + \frac{4}{\pi^2} \frac{\nu_2-1}{E_2} \right) y \int_0^{\infty} \frac{f_4(-x)}{x^2+y^2} dx;$$

$$W_3(\gamma y) = \frac{4}{\pi} \frac{l_3}{l_2 E_1} e^{-\gamma y} - \frac{2}{\pi} \frac{l_3}{l_2} \gamma e^{-\gamma y} l_4 + \frac{4}{\pi E_2} \gamma \gamma e^{-\gamma y};$$

$$W_4(\gamma y) = \frac{4}{\pi E_2} \gamma y e^{-\gamma y} + \frac{2}{\pi} \frac{l_3}{l_2 E_2} (2+3y-4\gamma y) e^{-\gamma y}.$$

Подставляя значения функций $A_1^*(a)$, $B_1^*(x)$ из (12) в (5) и (7), учитывая при этом (19) для определения $G_1(\beta) = \beta D_1(\beta)$; $G_2(\beta) = \beta D_2(\beta)$, получаем систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которая после некоторых преобразований примет вид:

$$G_1(\beta) = \Omega_1(\beta) + \int_0^{\infty} G_1(\gamma) K_1(\gamma; \beta) d\gamma + \int_0^{\infty} G_2(\gamma) K_2(\gamma; \beta) d\gamma; \quad (20)$$

$$G_2(\beta) = \Omega_2(\beta) + \int_0^{\infty} G_1(\gamma) K_3(\gamma; \beta) d\gamma + \int_0^{\infty} G_2(\gamma) K_4(\gamma; \beta) d\gamma,$$

где $K_l(\gamma; \beta)$ — функции, выраженные через $W_l(\gamma, y)$ ($l=1, 2, 3, 4$), а $\Omega_j(\beta)$ — выраженные через функции $\omega_j(y)$ ($j=1, 2$) и $f_n(x)$ ($n=1, 2, 3, 4$).

Для решения системы уравнений (20) сперва покажем, что

$$\int_0^{\infty} |K_1(\gamma, \beta)| d\gamma + \int_0^{\infty} |K_2(\gamma, \beta)| d\gamma < 1 \quad (21)$$

$$\int_0^{\infty} |K_3(\gamma, \beta)| d\gamma + \int_0^{\infty} |K_4(\gamma, \beta)| d\gamma < 1$$

Действительно, каждое ядро $K_i(\gamma, \beta)$ ($i=1, 2, 3, 4$) имеет вид, аналогичный приведенному в работе (3). Используя результаты оценок, приведенных в работе (3), доказывается, что неравенства (21) имеют место. Решая систему интегральных уравнений (20) методом последовательных приближений, получим выражения функций $G_1(\beta)$ и $G_2(\beta)$. Далее по формулам (13), (14), (12), (8), (9), (4), (6) последовательно можно определить все искомые функции, а следовательно, и напряжения и перемещения в любой точке составной полуплоскости.

Напряжения $\sigma_x^{(1)}(x, 0)$ и $\sigma_x^{(2)}(x, 0)$ вне разреза на линии $x=0$ выражаются через функции $G_1(\gamma)$ и $G_2(\gamma)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)}(0, y) = \sigma_x^{(2)}(0, y) = & -\frac{\pi}{2} \frac{l_2 C}{l_1(l_2+l_3)} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2-a^2}} \cos \delta \ln \frac{y+a}{y-a} + \\ & + \int_0^{\infty} G_1(\gamma) \left\{ \frac{2}{E_2} \frac{l_3}{l_1(l_2+l_3)} \gamma(1-\gamma y) - \frac{2}{E_1} \cdot \frac{l_2}{l_1(l_2+l_3)} y + \frac{2l_2 l_4}{l_1(l_2+l_3)} (1-\gamma y) + \right. \\ & + \gamma(\gamma y-1) \left. \right\} e^{-\gamma y} - \frac{\pi}{2} \frac{l_2}{l_1(l_2+l_3)} \cdot \frac{W_1(\gamma y)}{\mu} + \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{l_2}{l_1(l_2+l_3)} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2-a^2}} \times \\ & \times \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y} \left\{ W_1(\gamma r) \sin \delta \frac{r+a}{r-a} \frac{y-a}{y+a} - W_3(\gamma r) \cos \delta \ln \frac{r+a}{r-a} \frac{y-a}{y+a} \right\} d\gamma + \\ & + \int_0^{\infty} G_2(\gamma) \left\{ -\frac{\pi}{2} \frac{l_2}{l_1(l_2+l_3)} \cdot \frac{W_2(\gamma y)}{\mu} - \frac{l_2}{2\mu l_1(l_2+l_3)} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2-a^2}} \times \right. \\ & \times \int_{-a}^a \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r-y} \left\{ W_2(\gamma r) \sin \delta \ln \frac{r+a}{r-a} \cdot \frac{y-a}{y+a} + W_4(\gamma r) \cos \delta \ln \frac{r+a}{r-a} \frac{y-a}{y+a} \right\} dr - \\ & - \left\{ \frac{2}{E_2} \frac{l_3}{l_1(l_2+l_3)} \gamma(1-\gamma y) + \frac{l_2 \gamma}{E_2 l_1(l_2+l_3)} (1-\gamma-3\gamma y) \right\} e^{-\gamma y} \Big\} d\gamma + \\ & + \frac{l_3}{l_1(l_2+l_3)} \int_0^a \frac{r H'(r)}{r^2-y^2} dr - \frac{\pi}{2} \frac{l_2 \omega_1(y)}{\mu l_1(l_2+l_3)} + \frac{4}{\pi E_2} \cdot \frac{l_3}{l_1(l_2+l_3)} \int_0^{\infty} \frac{x f_2(x)}{x^2+y^2} dx - \\ & - \frac{4}{\pi E_2} \frac{l_3}{l_1(l_2+l_3)} \int_0^{\infty} \frac{x f_4(x) dx}{x^2+y^2} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l_2}{l_1(l_2+l_3)} \int_0^{\infty} \frac{x f_3(x) dx}{x^2+y^2} - \end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{l_1}{l_1(l_1+l_2)} \frac{\nu_1-1}{E_1} \int_0^\infty \frac{x f_1(x) dx}{x^2+y^2} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l_2(\nu_2-1)}{E_2 l_1(l_1+l_2)} \int_0^\infty \frac{x f_2(x) dx}{x^2+y^2}, \quad (22)$$

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ն. ՄԻՆԱՍՅԱՆ, Վ. Ո. ՏՈՆՈՅԱՆ

Ուղղանայաց վերջավոր ելեղիով անհամասեռ կիսահարթության համադրմի խնդրի մասին

Ներկա աշխատանքում դիտարկված է, որիզոնական եզրից սկսած նյութերի բաժանման գծի երկայնքով ճեղքված, անհամասեռ առաձգական կիսահարթության համար հարթ խնդիրը: Կիսահարթությունը կազմված է տարբեր առաձգական հատկություններով երկու համասեռ և իզոտրոպ քառորդ հարթություններից, որոնց նյութերի բաժանման գիծը ուղղահայաց է կիսահարթության եզրին: Ճեղքը ունի վերջավոր երկարություն: Կիսահարթության եզրագծի և ճեղքի եզրի վրա տրված են լարումների վեկտորը: Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով: Ինտեգրման անհայտ ֆունկցիաների որոշումը սկզբում բերվել է զույգ ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը, որն էլ իր հերթին բերվել է Ֆրեդհոլմի տիպի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը: Ապացուցված է այդ համակարգի լուծելիությունը: Ստացված են բանաձևեր կոնտակտային նորմալ լարումների որոշման համար:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. Е. Ашбаух, Прикл. механика (Тр. амер. о-ва механиков), т. 40, № 2, с. 312—314 (1973). ² Д. В. Боджи, Прикл. механика (Тр. амер. о-ва механиков), т. 35, № 3, с. 29—37 (1968). ³ А. Ф. Минасян, В. С. Тоноян, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 33, № 6, с. 18—42 (1980). ⁴ В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян, Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 25, № 3, с. 3—17 (1972). ⁵ С. П. Тимошенко, Теория упругости, ОНТИ, М., 1937. ⁶ С. Г. Михлин, Интегральные уравнения, Гостехиздат, М.—Л., 1949.