ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVII 1988 1

УДК 529.3.01

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. Мхитарян, С. З. Петросян

О решении одной смешанной краевой задачи для неоднородного полупространства с прямой линией раздела граничных условий

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 9/III 1988)

Основные результаты по исследованию контактных и смешанных задач теории упругости для канонических областей с прямыми линиями раздела граничных условий подытожены в [1-5].

В данной статье, развивая положения [6], приводится замкнутое решение одной смешанной задачи для упругого неоднородного по степенному закону полупространства с прямой линией раздела граничных условий.

1. Пусть упругое полупространство $z<0$, отнесенное к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, обладает изменяющимся по глубине по степенному закону $E=E_0|z|^\nu$ $(0\leqslant\nu<1)$ модулем упругости и постоянным коэффициентом Пуассона. Для него рассмотрим следующую смешанную краевую задачу:

$$\begin{gathered}
u_x(x,y,z)|_{z=0}=f(x,y),\quad u_y(x,y,z)|_{z=0}=g(x,y)\quad ((x,y)\in\omega);\\
\tau_{xz}(x,y,z)|_{z=0}=\tau_{yz}(x,y,z)|_{z=0}=0\quad ((x,y)\in\Pi/\omega);\qquad (1.1)\\
\sigma_z(x,y,z)|_{z=0}=0\ ((x,y)\in\Pi);\quad u_x,\ u_y,\ u_z\to0\ (x^2+y^2+z^2\to\infty);\\
\Pi=\{z=0;\ -\infty<x,y<\infty\};\quad \omega=\{z=0;\ x\geqslant0,\ -\infty<y<\infty\},
\end{gathered}$$

где u_x, u_y, u_z — компоненты смещений, а $f(x,y)$ и $g(x,y)$ — наперед заданные функции на полуплоскости ω.

На основании результатов из [6] решение (1.1) сведем к решению следующей системы интегральных уравнений на ω:

$$\iint_\omega R^{-1-\nu}(x-\xi,y-\eta)[\vartheta_1+\vartheta_2(x-\xi)^2R^{-2}(x-\xi,y-\eta)]p(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$

$$+\vartheta_2\iint_\omega(x-\xi)(y-\eta)R^{-3-\nu}(x-\xi,y-\eta)q(\xi,\eta)\,d\xi d\eta=f(x,y),\qquad (1.2)$$

$$\vartheta_2\iint_\omega(x-\xi)(y-\eta)R^{-3-\nu}(x-\xi,y-\eta)p(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+\iint_\omega R^{-1-\nu}(x-\xi,y-\eta)[\vartheta_1+$$

$$+\vartheta_2(y-\eta)^2R^{-2}(x-\xi,y-\eta)]q(\xi,\eta)\,d\xi d\eta=g(x,y),$$

$$R(x,y)=(x^2+y^2)^{1/2};\quad \vartheta_1=[\pi(1-\nu)\gamma_1]^{-1}\vartheta_0\Gamma(1+\varepsilon)[(1-\nu)A_\nu^{+}-(1+\nu)A_\nu^{-}];$$

$$\vartheta_2 = 2[\pi(1-\nu)\gamma]^{-1}\vartheta_*(1+\nu)\Gamma(1+\varepsilon)A_\nu^-;\ \varepsilon=(1+\nu)/2.$$

Здесь $p(x, y)$ и $q(x, y)$—неизвестные касательные напряжения в области ω вдоль осей Ox и Oy соответственно, а γ, ϑ_*, $A_\nu^{\pm}$—комбинации упругих постоянных полупространства, которые приведены в [2,3].

Применяя к обеим частям системы (1.2) преобразование Фурье по переменной y, сведем ее к системе одинарных интегральных уравнений

$$\int_0^\infty |t-u|^{-\nu/2}[\vartheta_1^* K_{\nu/2}(|t-u|) + \vartheta_2^*|t-u|K_{1+\nu/2}(|t-u|)]p_*(u)du +$$

$$+ i\vartheta_2^*\operatorname{sgn}\lambda\int_0^\infty (t-u)|t-u|^{-\nu/2}K_{\nu/2}(|t-u|)q_*(u)du = |\lambda|^{-2\varkappa}f_*(t),$$

$$(1.3)$$

$$i\vartheta_2^*\operatorname{sgn}\lambda \int_0^\infty (t-u)|t-u|^{-\nu/2}K_{\nu/2}(|t-u|)p_*(u)du + \int_0^\infty |t-u|^{-\nu/2}\times$$

$$\times[\vartheta_3^* - \vartheta_2^*|t-u|K_{1+\nu/2}(|t-u|)]q_*(u)du = |\lambda|^{-2\varkappa}g_*(t);$$

$$|\lambda|x = t,\ |\lambda|\xi = u;\ f_\lambda(x) = f_\lambda(t/|\lambda|) = f_*(t),\ g_\lambda(x) = g_\lambda(t/|\lambda|) = g_*(t);$$

$$p_\lambda(x) = p_\lambda(t/|\lambda|) = p_*(t),\ q_\lambda(x) = q_\lambda(t/|\lambda|) = q_*(t);\ \varkappa = (\nu-1)/2;$$

$$\vartheta_1^* = \sqrt{\pi}(1+\nu)2^{-\nu/2}\Gamma^{-1}(1+\varepsilon)\vartheta_1;\quad \vartheta_2^* = \sqrt{\pi}2^{-\nu/2}\Gamma^{-1}(1+\varepsilon)\vartheta_2;$$

$$\vartheta_3^* = [\sqrt{\pi}(1-\nu)\gamma]^{-1}(1+\nu)\vartheta_*2^{-\nu/2}[(1-\nu)A_\nu^+ + (1+\nu)A_\nu^-];$$

$$\{p_\lambda(x);\ q_\lambda(x);\ f_\lambda(x);\ g_\lambda(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\{p(x, y);\ q(x, y);\ f(x, y);\ g(x, y)\}e^{i\lambda y}dy.$$

В (1.3) $K_\nu(x)$—известная функция Макдональда.

2. Решение системы уравнений (1.3) представим в виде бесконечных рядов ($0<t<\infty$)

$$p_*(t) = e^{-t}t^\varkappa\sum_{n=0}^\infty X_nL_n^\varkappa(2t),\quad q_*(t) = e^{-t}t^\varkappa\sum_{n=0}^\infty Y_nL_n^\varkappa(2t). \tag{2.1}$$

с неизвестными коэффициентами X_n, Y_n. Одновременно положим

$$f_*(t) = e^{-t}t^\varkappa\sum_{n=0}^\infty f_nL_n^\varkappa(2t),\quad g_*(t) = e^{-t}t^\varkappa\sum_{n=0}^\infty g_nL_n^\varkappa(2t). \tag{2.2}$$

В (2.1)—(2.2) $L_n^\varkappa(t)$—многочлены Чебышева—Лагерра, причем в (2.2) коэффициенты f_n и g_n считаются известными.

Далее заметим, что на основании свойств четности функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ по y вместо системы (1.2) можно рассматривать эту же самую систему, в которой функции $p(\xi, \eta)$, $q(\xi, \eta)$, $f(x, y)$, $g(x, y)$ заменены соответственно функциями $p_\pm(\xi, \eta)$, $q_\mp(\xi, \eta)$, $f_\pm(x, y)$, $g_\pm(x, y)$, где

$$p(\xi,\eta)=p_+(\xi,\eta)+p_-(\xi,\eta),\quad q(\xi,\eta)=q_+(\xi,\eta)+q_-(\xi,\eta);$$

$$f(x,y)=f_+(x,y)+f_-(x,y),\quad g(x,y)=g_+(x,y)+g_-(x,y);$$

$$f_\pm(x,-y)=\pm f_\pm(x,y);\quad p_\pm(\xi,-\eta)=\pm p_\pm(\xi,\eta);\quad q_\pm(\xi,-\eta)=\pm q_\pm(\xi,\eta),$$

причем без ограничения общности одну из соответствующих друг другу двух функций из $f_\pm(x,y)$, $g_\pm(x,y)$ можно положить равной нулю. Для определенности возьмем

$$f(x,y)=f_+(x,y),\quad g_-(x,y)=0.$$

Тогда

$$\overline{p_1(x)}=p_1(x),\quad \overline{q_1(x)}=-q_1(x);\quad \overline{X}_n=X_n,\quad \overline{Y}_n=-Y_n\quad (n=0,1,\ldots).$$

Учитывая эти равенства, можно положить $Y_n=iZ_n$, где Z_n—вещественные коэффициенты, подлежащие вместе с коэффициентами X_n к определению, и можно считать $\nu>0$.

Теперь (2.1) и (2.2) подставляем в систему (1.3) и учтем указанное обстоятельство. В результате после использования известного спектрального соотношения для многочленов Чебышева—Лагерра [2, 3] и некоторых преобразований и вычислений интегралов систему уравнений (1.3) сведем к следующей системе линейных конечно-разностных уравнений:

$$2\nu_0\overline{\vartheta}_\nu(\xi_{n+1}-\eta_{n+1})+(\nu_1-3)(\xi_{n+1}+\eta_{n+1})-2(\xi_{n+2}+\eta_{n+2})=a_n^{(2)}$$
$$\tag{2.3}$$
$$2\nu_0\overline{\vartheta}_\nu(\xi_{n+1}+\eta_{n+1})-2(\xi_n-\eta_n)+(\nu_1-3)(\xi_{n+1}-\eta_{n+1})=b_n^{(2)}\quad (n=0,1,2,\ldots);$$

$$\xi_n=U_{n-1}-U_n,\quad \eta_n=V_{n-1}-V_n;\quad U_{n-1}=\Gamma(n-1-\nu)\Gamma^{-1}(n)X_{n-1},$$

$$V_{n-1}=\Gamma(n-1-\varkappa)\Gamma^{-1}(n)Z_{n-1};\quad \nu_0=(1-\nu)/(1+\nu);\quad \nu_1=(3-\nu)/(1+\nu);$$

$$\overline{\vartheta}_\nu=A_\nu^+/A_\nu^-;\quad a_n=-\lambda^{-2\varkappa}(f_n^+-f_{n+1}^+)\gamma\varkappa 2^{(5+\nu)/2}[(1+\nu)^2\vartheta_\nu\times$$
$$\tag{2.4}$$
$$\times A_\nu^-\Gamma(-\varkappa)]^{-1};\quad a_n^{(2)}=a_n^{(1)}+b_n^{(1)};\quad b_n^{(2)}=a_n^{(1)}-b_n^{(1)};\quad a_n^{(1)}=a_n+\nu_1\alpha_nU_{n+1}-$$

$$-\beta_nU_{n+2}+\beta_{n-1}V_{n+1}-\beta_nV_{n+2};\quad b_n^{(1)}=\beta_{n-1}U_{n+1}-\beta_nU_{n+2}+\nu_1\alpha_nV_{n+1}-\beta_nV_{n+2};$$

$$\alpha_n=\frac{1+\nu}{2n+1-\nu}-\frac{(3+\nu)(1+\nu)}{2(n+1)(3-\nu)}-\frac{(3+\nu)(1+\nu)^2}{2(n+1)(2n+1-\nu)(3-\nu)};$$

$$\beta_n=\frac{1+\nu}{2n+3-\nu}-\frac{1-\nu}{2(n+2)}-\frac{1-\nu^2}{2(n+2)(2n+3-\nu)}.$$

Отметим, что в системе уравнений (2.3) в соответствии с поведением коэффициентов при $n\to\infty$ выделены их главные и регулярные части, которые расположены в левых и правых частях, соответственно, этих уравнений.

Далее положив

$$p_n=\xi_n-\eta_n,\quad q_{n-1}=\xi_n+\eta_n\quad (n=0,1,2,\ldots);\quad c_\nu=(2\nu_0\overline{\vartheta}_\nu+\nu_1-3)/2, \tag{2.5}$$

систему уравнений (2.3) представим в виде

$$q_{n+1}-c_\nu q_n=-a_n^{(2)}/2-2\nu_0\overline{\vartheta}_\nu\eta_{n+1}; \tag{2.6}$$

$$p_{n+1}-c_\nu^{-1}p_n=b_n^{(2)}/2c_\nu-2\nu_0\bar{\vartheta}_\nu/c_\nu\quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{2.7}$$

Считая правые части уравнений (2.6) и (2.7) известными, запишем их решения ([7]):

$$q_n=q_0c_\nu^n-2^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}c_\nu^{n-k-1}[a_k^{(2)}+4\nu_0\bar{\vartheta}_\nu\eta_{k+1}]; \tag{2.8}$$

$$p_n=p_0c_\nu^{-n}+(2c_\nu)^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}c_\nu^{-n+k+1}[b_k^{(2)}-4\nu_0\bar{\vartheta}_\nu\eta_{k+1}]\quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{2.9}$$

Теперь при помощи (2.4) и (2.5) в уравнениях (2.8) и (2.9) при $n=1,2,\ldots$ возвратимся к прежним коэффициентам U_n и V_n. В результате после некоторых преобразований относительно этих коэффициентов получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{gathered}U_n+\sum_{k=1}^{n}L_{n,k}^{(11)}U_k+\sum_{k=1}^{n}L_{n,k}^{(12)}V_k=C_n^{(1)};\\ V_n+\sum_{k=1}^{n}L_{n,k}^{(21)}U_k+\sum_{k=1}^{n}L_{n,k}^{(22)}V_k=C_n^{(2)}\quad (n=1,2,\ldots).\end{gathered} \tag{2.10}$$

Ядра $L_{n,k}^{(ij)}$ и правые части $C_n^{(i)}$ $(i,j=1,2)$ системы (2.10) выражаются через параметры ν_0, ν_1, c_ν, α_n, β_n, $\bar{\vartheta}$, формулами весьма простых структур, причем в выражения $C_n^{(i)}$ линейно входят коэффициенты U_0, V_0. Очевидно, что при помощи определенных формул решение системы (2.10), т. е. коэффициенты U_n; V_n $(n=1,2,\ldots)$, можно выразить через коэффициенты U_0; V_0, для определения которых нужны дополнительные условия.

Для определения этих условий на основании известных асимптотических формул для многочленов Чебышева—Лагерра ([8]) находим, что для равномерной сходимости рядов (2.1) на любом отрезке $[\varepsilon_0, M]$ $(\varepsilon_0>0, M>0)$ оси t достаточно, чтобы $X_n, Y_n=O(n^{-1+1/2+\delta})$ $(\delta>0, n\to\infty)$. Отсюда вытекает, что необходимо, чтобы $U_n, V_n\to 0$ $(n\to\infty)$, или $\xi_n, \eta_n\to 0$ $(n\to\infty)$, или же $p_n, q_n\to 0$ $(n\to\infty)$. Следовательно, в силу (2.8) искомые дополнительные условия при $c_\nu=1$ имеют вид

$$\begin{gathered}q_0-2^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}[a_k^{(2)}+4\nu_0\bar{\vartheta}_\nu\eta_{k+1}]=0;\\ p_0+2^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}[b_k^{(2)}-4\nu_0\bar{\vartheta}_\nu\eta_{k+1}]=0.\end{gathered} \tag{2.11}$$

Если $c_\nu>1$, что, как показывают анализ и необходимые вычисления, имеет место в довольно широком диапазоне изменения параметра ν в $[0,1)$ включая окрестность точки $\nu=0$, то из (2.8) будем иметь

$$\begin{gathered}q_0-2^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}c_\nu^{-k-1}[a_k^{(2)}+4\nu_0\bar{\vartheta}_\nu\eta_{k+1}]=0;\\ p_0-2\nu_0\bar{\vartheta}_\nu\eta_1+b_0^{(2)}/2=0.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Второе условие (2.12) получено при помощи следующих рассуждений. Очевидно, что левые части (2.6) и (2.7) переходят одна в другую формальной заменой c_ν на c_ν^{-1}. Поэтому ввиду равноправности коэффициентов p_n и q_{n-1} в отношении их поведения при $n \to \infty$ коэффициенты p_n относительно c_ν^{-1} должны иметь при $n \to \infty$ такой же порядок, какой имеют коэффициенты q_{n-1} относительно c_ν. Это требование и приводит ко второму условию (2.12). При $c_\nu < 1$ условия (2.12) в определенном смысле поменяются местами и нетрудно их выписать из (2.8).

Если теперь условия (2.11) или (2.12) или же подобные им условия при $c_\nu < 1$ записать в коэффициентах U_n, V_n ($n=0, 1, 2, \ldots$) и принять во внимание сказанное выше относительно системы (2.10), то придем к системе из двух линейных уравнений относительно U_0; V_0, которая вместе с (2.10) замыкает систему определяющих уравнений обсуждаемой смешанной задачи.

Далее отметим, что введя новые неизвестные коэффициенты

$$W_{2k-1}=U_k, \quad W_{2k}=V_k \quad (k=1, 2, \ldots n),$$

систему (2.10) можем записать в виде

$$\sum_{r=1}^{2n} l_{j,r} W_r = b_j \quad (j=1, 2, \ldots 2n), \tag{2.13}$$

где $l_{j,r}$ и b_j элементарным образом выражаются через $L_{n,k}^{(j)}$ и $C_n^{(j)}$. Матрица системы (2.13) $\|l_{j,r}\|$ имеет квазитреугольную форму, которая при помощи элементарных преобразований приводится к треугольному виду. Такая матрица имеет обратную матрицу с элементами, выражающимися через элементы $l_{j,r}$ в явной форме, что позволяет записать решение системы (2.13) и тем самым системы (2.10) в замкнутом виде.

В частном случае $\nu=0$, т. е. в случае обычного упругого полупространства, вследствие того, что $\alpha_n=\beta_n=0$, регулярные части в системе (2.3) исчезают и эта система в коэффициентах U_n, V_n допускает следующее простое замкнутое решение:

$$U_n=-\vartheta_1^0 a_0 - \vartheta_1^0 \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k-1}+a_{k+1}) - 2\vartheta_2^0 \sum_{k=0}^{n-1} a_k;$$

$$V_n=\vartheta_1^0 a_0 + \vartheta_1^0 \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}-a_{k-1}) \quad (a_{-1}=0;\ n=1, 2, \ldots);$$

$$U_0=-\vartheta_1^0 a_0, \quad V_0=\vartheta_1^0 a_0;$$

$$\vartheta_1^0=\sigma^2/16(1-\sigma); \quad \vartheta_2^0=\sigma(2-\sigma)/16(1-\sigma), \quad a_n=i(f_n^+-f_n^-)2\sqrt{2}E_0/\sigma(1+\sigma).$$

В заключение отметим, что на основании результатов из ([9]) можно найти смещения в области Π/ω.

Институт механики Академии наук Армянской ССР
Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Ս. Զ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ուղիղ գծով բաժանվող սահմանային պայմաններով անհամասեռ կիսատարածության համար մի խառը եզրային խնդրի լուծման մասին

Ըստ խորության աստիճանային օրենքով փոփոխվող առաձգականության մոդուլ ունեցող կիսատարածության համար դիտարկվում է խառը եզրային խնդիր, երբ վերջինիս եզրային մակերևույթի մի տիրույթում՝ կիսահարթության տեսքով տրված են հորիզոնական ուղղությամբ տեղափոխությունների բաղադրիչները, իսկ մնացած մասի վրա շոշափող լարումների բաղադրիչները հավասար են զրոյի, ընդ որում լարումների նորմալ բաղադրիչը ամենուրեք այդ մակերևույթի վրա հավասար է զրոյի։ Չեբիշև—Լագերի բազմանդամների մեթոդի օգնությամբ խնդիրը նկարագրող ինտեգրալ հավասարումների համակարգը բերվում է գծային վերջավոր տարբերությունների հավասարումների համակարգի, որը թույլատրում է փակ լուծում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] Развитие теории контактных задач в СССР, Наука М., 1976. [2] *Г. Я. Попов*, Контактные задачи для линейно-деформируемого основания, Вища школа, Киев—Одесса, 1982. [3] *Г. Я. Попов*, Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений, Наука, М., 1982. [4] *В. Л. Рвачев, В. С. Проценко*, Контактные задачи теории упругости для неклассических областей, Наукова думка, Киев, 1977. [5] *Я. С. Уфлянд*, Интегральные преобразования в задачах теории упругости, Наука, Л., 1968. [6] *С. М. Мхитарян, С. З. Петросян*, ДАН АрмССР, т. 82, № 1, с. 28—32 (1986). [7] *А. А. Самарский, Е. С. Николаев*, Методы решения сеточных уравнений, Наука, М., 1978. [8] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи*, Высшие трансцендентные функции, т. 2, Наука, М., 1974. [9] *С. М. Мхитарян*, Изв. АН СССР, МТТ, № 1, 1983.