

УДК 539.3

МЕХАНИКА

С. О. Саркисян

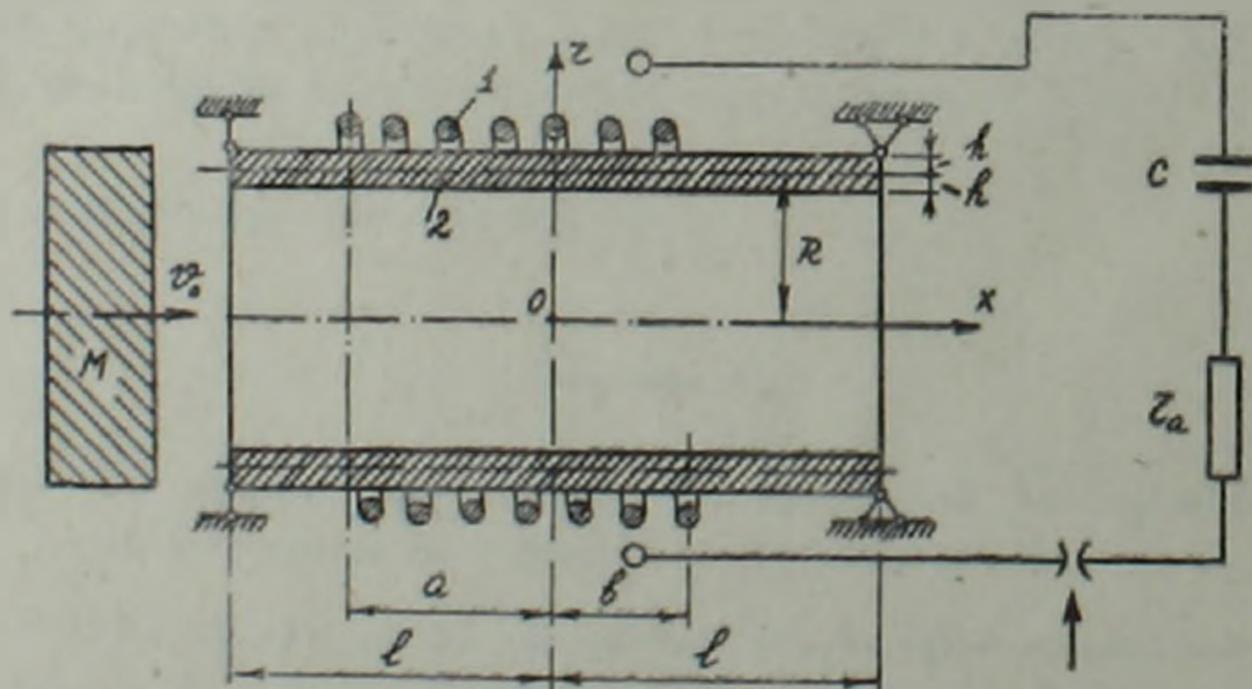
Магнитоимпульсное нагружение проводящей тонкой цилиндрической оболочки

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 18/III 1988)

Развитие техники получения сильных импульсных магнитных полей и создание магнитоаккумулятивных генераторов позволило применять большие давления, воздействующие на поверхность проводников, что широко используется: при пластической обработке металлов, обжатии труб, насадке их с высокой прочностью и плотностью соединения, формовке плоских листовых деталей, обработке изделий малой толщины из хорошо проводящих металлов и др. Теоретические исследования в этой области и выработка определенных рекомендаций ныне стали возможными благодаря уже созданной математической теории магнитоупругости проводящих тонких тел (¹⁻²).

В данной работе изучается магнитоимпульсное нагружение проводящей тонкой цилиндрической оболочки. Полученные результаты можно рекомендовать для техники «магнитной штамповки» (³⁻⁴).

1. Рассматривается осесимметричное движение шарнирно опертой круговой цилиндрической оболочки толщиной $2h$, радиусом средней поверхности R , длиной $2l$, находящейся в заданном импульсном магнитном поле напряженности B_{01} (рисунок). Магнитное поле



напряженности B_{01} получается при разряде емкостного накопителя на систему магнитосвязанных контуров (с электрической точки зрения индуктор I с цилиндрической оболочкой 2 , включенный в разрядную цепь магнитоимпульсной установки, можно представить в виде магнитосвязанных контуров). Разряд емкостного накопителя происходит в

тот момент ($t=0$), когда тело массой M , движущееся со скоростью v_0 , ударяется о левый конец упругой оболочки.

Отметим, что при линейной постановке задачи должна быть заранее известной напряженность внешнего магнитного поля, в данном случае она выражается формулой (2.5)

$$B_{01}(x, t) = B_0 e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t, \quad (1.1)$$

при этом $B_0 \neq 0$, когда $-l \leq x \leq l$, и равно нулю вне этого отрезка; ω — круговая частота разряда; δ — декремент затухания. В силу тонкостенности оболочки считается, что B_{01} не зависит от поперечной к срединной поверхности оболочки направления.

Выражение (1.1) означает, что электромагнитный процесс в электрической цепи представляет собой колебательный разряд, при этом

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \delta = \frac{0.5r_a}{L}, \quad L = L_y + L_{a-0},$$

где L_y — собственная индуктивность магнитоимпульсной установки в режиме короткого замыкания, L_{a-0} — индуктивность системы индуктор-оболочка, C — емкость конденсатора, причем (5)

$$L_{a-0} = \mu_0 \pi N^2 (R_a^2 - R^2) / l,$$

N — число витков индуктора, μ_0 — магнитная постоянная, l — длина индуктора, R_a — внутренний радиус индуктора, r_a — активное сопротивление разрядного контура.

Величина B_0 в выражении (1.1) определяется формулой (2.2)

$$B_0 = 4\pi n U \sqrt{\frac{C}{L}},$$

где U — разность потенциалов между обкатками конденсатора.

При исследовании магнитоупругих осесимметричных движений цилиндрической оболочки рассматриваем основную разрешающую систему двумерных уравнений магнитоупругости тонких оболочек (2.1)

$$\frac{2Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right] - 2\rho h \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{2Eh}{1-\nu^2} \frac{w(x, t)}{R^2} + \frac{2Eh}{1-\nu^2} \cdot \frac{\nu}{R} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} +$$

$$+ 2\rho h \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{2\gamma h}{c^2} B_{01} \varphi(x, t) +$$

$$+ \frac{4\pi \gamma^2 h^3}{3 c^2} B_{01} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (1.2)$$

$$\varphi(x, t) + 2\pi \frac{\gamma h^2}{c^2} \cdot \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} - \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} =$$

$$= \frac{4\pi R h}{c} \int_{-l}^l K(x, x_0) \left[\frac{4\pi \gamma}{c} \frac{\partial \varphi(x_0, t)}{\partial t} + \frac{8\pi^2 \gamma^2 h^2}{3 c^2} \frac{\partial^2 \varphi(x_0, t)}{\partial t^2} \right] dx_0, \quad -l \leq x \leq l$$

$$\varphi(x, t) = E_{\varphi_0}(x, t) + \frac{B_{01}}{c} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t},$$

где u — осевое перемещение, w — прогиб срединной поверхности оболочки, σ — электропроводимость, E и ν — упругие константы материала оболочки. E_{φ_0} — азимутальное составляющее напряженности индуцированного в оболочке электрического поля.

К разрешающим уравнениям следует присоединить следующие граничные и начальные условия (считается, что ударяющая масса бесконечно большая):

при

$$x = -l, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v_0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (1.3)$$

$$x = l, \quad T_r = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

при

$$t = 0, \quad -l < x < l, \quad u = \frac{\partial u}{\partial t} = w = \frac{\partial w}{\partial t} = \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (1.4)$$

Таким образом, задача движения электропроводящей цилиндрической оболочки в заданном осевом импульсном магнитном поле (1.1) приводится к совместному исследованию уравнений (1.2), граничных (1.3) и начальных (1.4) условий.

2. Ядро интегрального уравнения (1.2) представляет собой (2.5) функцию Грина для уравнений Максвелла, имеющую место во всем трехмерном пространстве (вакууме), в данном случае (7) частное решение следующего уравнения:

$$\frac{\partial^2 E_{\varphi}^{(e)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{\varphi}^{(e)}}{\partial r} - \frac{E_{\varphi}^{(e)}}{r^2} + \frac{\partial^2 E_{\varphi}^{(e)}}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \delta(r-R) \delta(x-x_0), \quad (2.1)$$

где $E_{\varphi}^{(e)}$ — напряженность электрического поля в окружающем оболочку пространстве (вакууме), $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Применяя к уравнению (2.1) преобразование Фурье по переменной x и далее преобразования Ханкеля по переменной r , в окончательном итоге для $E_{\varphi}^{(e)}$ будем иметь

$$E_{\varphi}^{(e)}(r, x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-|x-x_0|\xi} \mathcal{Y}_1(\xi r) \mathcal{Y}_1(\xi R) d\xi, \quad (2.2)$$

где $\mathcal{Y}_1(x)$ — функция Бесселя.

Подставляя в (2.2) $r=R$, приходим к выражению функции Грина на срединной поверхности оболочки, которое и представляет ядро интегрального уравнения (1.2)

$$K(x, x_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-|x-x_0|\xi} \mathcal{Y}_1^2(\xi R) d\xi. \quad (2.3)$$

После введения новой безразмерной координаты $x = \frac{x}{l}$, $z = \frac{z}{l}$ ядро (2.3) примет следующий вид:

$$K(lx, lz_0) = \frac{1}{2l} K(x, z_0), \quad (2.4)$$

$$K(x, z_0) = \int_0^{\infty} e^{-|x-z_0|\sqrt{k^2+y^2}} y^2(k^2) dy, \quad k = \frac{R}{l}.$$

При помощи формулы 6.612 (5) ((⁸) с. 723) ядро $K(x, z_0)$ можно представить так:

$$K(x, z_0) = \frac{1}{\pi k^2} \left[\frac{(x-z_0)^2 + 2k^2}{\sqrt{(x-z_0)^2 + 4k^2}} K\left(\frac{2k}{\sqrt{(x-z_0)^2 + 4k^2}}\right) - \sqrt{(x-z_0)^2 + 4k^2} E\left(\frac{2k}{\sqrt{(x-z_0)^2 + 4k^2}}\right) \right], \quad (2.5)$$

где $K(m)$ и $E(m)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода (⁸).

Используя разложения эллиптических интегралов в ряды (⁸), легко обнаружить, что первое слагаемое в правой части формулы (2.5) при $x = z_0$ содержит логарифмическую сингулярность $\ln \frac{1}{|x-z_0|}$, выделяя которую (2.5) можно представить в следующем виде:

$$K(x, z_0) = \frac{1}{\pi k} \left[\ln \frac{1}{|x-z_0|} + N(x, z_0) \right], \quad (2.6)$$

где $N(x, z_0)$ представляет регулярную часть ядра $K(x, z_0)$.

3. Можно предложить следующие методы решения начально-граничной задачи (1.2) — (1.4) с учетом (2.4) и (2.6).

Первая формулировка базируется на преобразовании интегродифференциального уравнения (1.2) в интегральное. Для этого введем временную сетку, заменив искомые функции сеточной, а производные искомых функций — их разностными аналогами; таким же образом будем поступать и с дифференциальными уравнениями системы (1.2). Итак, для решения рассматриваемой задачи на каждом шаге времени необходимо совместно решать интегральное уравнение Фредгольма второго рода и два обыкновенных дифференциальных уравнения (получаемая система на каждом шагу времени решается на ЭВМ при помощи известных численных методов).

Теперь сформулируем второй метод решения начально-граничной задачи (1.2) — (1.4).

Ищем решение системы уравнений (1.2) в виде

$$u = \frac{1}{2} (1-a)v_0 t + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) \cos \frac{m\pi}{2} (1-a), \quad -1 \leq a \leq 1$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(t) \cdot \sin \frac{m\pi}{2} (1-a). \quad (3.1)$$

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(t) T_m(x),$$

удовлетворяющем условиям свободного опирания на концах (1.3). Величина φ считается на концах линии интегрирования $\alpha = \pm 1$ конечной, так как величина F_{α} по физическому содержанию задачи (1.2) должна быть непрерывной из области оболочки через граничный контур оболочки во внешнюю область. В (3.1) $T_m(\alpha)$ представляют собой многочлены Чебышева (8).

Теперь подставим (3.1) в уравнение (1.2); при рассмотрении первых двух уравнений системы (1.2) примем обычный процесс ортогонализации, а при рассмотрении интегродифференциального уравнения (1.2) примем метод ортогональных многочленов (9, 10).

Метод ортогональных многочленов базируется на замечательном свойстве классических многочленов: они являются собственными функциями многих интегральных операторов. В частности (9, 10), имеет место соотношение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|z-z_0|} \frac{T_n(z_n)}{\sqrt{1-z_n^2}} dz_0 = \mu_n^0 T_n(z), \quad n=0, 1, 2, \dots, \infty$$

$$\mu_0^0 = \ln 2, \quad \mu_n^0 = \frac{1}{n}, \quad n=1, 2, \dots, \infty, \quad -1 < z < 1, \quad (3.2)$$

означающее, что многочлены Чебышева $T_n(\alpha)$ — собственные функции интегрального оператора с логарифмическим ядром, а μ_n^0 — его собственные числа.

В результате подстановки (3.1) в систему уравнений (1.2) приходим к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $u_m(t)$, $w_m(t)$, $\varphi_m(t)$, которая с учетом начальных условий (1.4) решается на ЭВМ с помощью метода Рунге—Кутты.

Итак, определяя решение начально-граничной задачи (1.2) — (1.4), тем самым определяем основные разрешающие функции задачи $u(x, t)$, $w(x, t)$, $\varphi(x, t)$, $-l < x < l$, $t \geq 0$. Зная величины этих основных функций, их можно подставить в известные формулы работ (2.6) и определить остальные расчетные величины исследуемой задачи. В частности, легко определяется величина $\frac{\partial w(x, t)}{\partial t}$ в различных точках числового отрезка $x \in (-l, l)$, которая будет представлять скорость точек срединной поверхности оболочки при магнитоимпульсном нагружении.

Леянаканский филиал
Ереванского политехнического института
им. К. Маркса

Հաղորդիչ բարակ պլանական բաղաձայնի մագնիսախմբույթային
բեռնավորումը

Ուսումնասիրվում է հողակապորին ամրացված բարակ պլանական թաղանթի առանցքասիմետրիկ շարժումը, երբ այն գտնվում է իմպուլսային առանցքային մագնիսական դաշտում:

Բերվում է բարակ թաղանթի մագնիսաստատաձգականության երկչափ տեսության որոշիչ հավասարումների համակարգը: Ուսումնասիրվում է ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարման կորիզի բնույթը և ձևակերպվում են դրված խնդրի լուծման մի քանի մեթոդներ:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян, Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, Наука, М., 1977. ² С. О. Саркисян. Магнитоупругость проводящих тонких оболочек и пластин. Докторская диссертация, Казанский гос ун-т, 1987. ³ И. В. Белый, С. М. Фертик, Л. Г. Хиженко, Справочник по магнитноимпульсной обработке металлов, Вища школа, Харьков, 1977. ⁴ В. И. Дресвянников. Прикладные проблемы прочности и пластичности, вып 11, с 32—47 (1979). ⁵ А. А. Дудин, Магнитноимпульсная сварка металлов, Металлургия, М., 1979. ⁶ С. О. Саркисян. Изв. АН АрмССР. Механика, т 38, № 6, с. 21—34 (1985) ⁷ С. О. Саркисян, в кн.: III Всесоюз. симпозиум «Теоретические вопросы магнитоупругости», Ереван, Ереванский ун-т, 1984. ⁸ И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений, Наука, М., 1971. ⁹ Г. Я. Полов. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений, Наука, М., 1982. ¹⁰ Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976.