ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXVII 1988 1

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

К. С. Казарян

Точная оценка меры множества расходимости для рядов Фурье в классе равномерно ограниченных полных ортонормированных систем

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 18/II 1988)

Исследования, касающиеся расходимости рядов Фурье на множествах положительной меры почти всюду, берут начало со знаменитой работы А. Н. Колмогорова ([1]), в которой был построен расходящийся почти всюду ряд Фурье по тригонометрической системе. История развития этой проблематики хорошо известна. Непосвященного читателя отсылаем к статье П. Л. Ульянова ([2]). Разные математики в различное время ставили задачи о распространении теоремы Колмогорова на ортонормированные системы (ОНС), ограниченные в совокупности. Отметим одну малоизвестную статью П. Л. Ульянова ([3]), где ставилась подобная задача в следующей формулировке: если задана полная ОНС (ПОНС), ограниченная в совокупности, то существует ли ряд Фурье—Лебега по этой системе, который расходится на множестве положительной меры?

В 1975 г. С. В. Бочкарев ([4]) доказал, что если ОНС $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ определенных на отрезке $[0, 1]$ функций равномерно ограничена, т. е.

$$\|\varphi_n\|_\infty \leqslant M \quad (n=1, 2, \ldots), \tag{1}$$

то существует такая функция $f \in L_{[0,1]}$, что ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\varphi_n(t),$$

$$a_n(f) = \int_0^1 f(t)\varphi_n(t)dt, \tag{2}$$

расходится на некотором множестве $E \subset [0, 1]$, $|E|>0$. В работе ([5]) был дан отрицательный ответ на задачу о существовании почти всюду расходящегося ряда Фурье для ПОНС $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, ограниченного в совокупности (см. ([6])). Было доказано, что для любого множества $G \subset [0, 1]$, $|G|>0$, $|G|<1$, существует ПОНС $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, ограниченная в совокупности, такая, что все ряды Фурье по системе $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ почти всюду сходятся на множестве G.

Определение 1. Множество $G \subset [0, 1]$, $|G|>0$ называется множеством сходимости для ОНС $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ определенных на отрезке $[0, 1]$

функций, если все ряды Фурье по системе $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ почти всюду сходятся на множестве G.

Теоремы 1 и 2 устанавливают точную оценку мер множеств сходимости и расходимости для рядов Фурье по ПОНС, ограниченным в совокупности через их верхнюю грань. Отметим, что резонансная теорема Сакса в близких вопросах применялась в работах ([9, 6]).

Теорема 1. *Для любого* $M>1$ *и любого множества* $G\subset[0,1]$, $|G|=1-M^{-2}$ *существует удовлетворяющая условию* (1) *ПОНС* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, *для которой* G *является множеством сходимости.*

Используя доказательство теоремы Бочкарева и теорему Сакса (см. ([7]), а также ([8]), с. 36), нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ОНС, удовлетворяющая условию* (1). *Тогда существует такая функция* $f\in L_{[0,1]}$, *что ряд*

$$f(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f)\varphi_n(t),$$

где коэффициенты $a_n(f)$ *определены равенствами* (2), *расходится на некотором множестве* $E\subset[0,1]$, $|E|\geq M^{-2}$.

Институт математики Академии наук Армянской ССР

Գ. Ա. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Համասարաչափ սահմանափակ լրիվ օրթոնորմավորված համակարգերի դասում Ֆուրյեի շարքերի տարամիտության բազմության չափի ճշգրիտ գնահատականը

Տեղի ունեն հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 1. Յանկացած $M>1$ թվի և $G\subset[0,1]$, $|G|=1-M^{-2}$ բազմության համար գոյություն ունի լրիվ օրթոնորմավորված $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ սիստեմ, $\|\varphi_n\|_{\infty}\leq M$ $(n=1,2,\ldots)$ այնպիսին, որ G-ն հանդիսանում է զուգամիտության բազմություն:

Թեորեմ 2. Դիցուք $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ օրթոնորմավորված սիստեմ է, $\|\varphi_n\|_{\infty}\leq M$ $(n=1,2,\ldots)$: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի $f\in L_{[0,1]}$ ֆունկցիա, որ

$$f(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f)\varphi_n(t),\quad a_n(f)=\int_0^1 f(t)\varphi_n(t)dt,$$

շարքը տարամիտում է $E\subset[0,1]$ բազմության վրա և $|E|\geq M^{-2}$:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *A. N. Kolmogorov*, Fund. Math., v. 4 (1923). [2] *П. Л. Ульянов*, УМН, т. 38 (1983). [3] *П. Л. Ульянов*, Изв. АН АзССР. Сер. физ.-тех. и мат. наук, т. 6 (1965). [4] *С. В. Бочкарев*. Мат. сб., т. 98, с. 140 (1975). [5] *К. С. Казарян*, Мат. сб., т. 119 (1982). [6] *I. Joo*. Acta Math. Ac. Sci. Hung., v. 37 (1981). [7] *S. Saks*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 35 (1939). [8] *С. Качмаж, Г. Штейнгауз*. Теория ортогональных рядов, Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1958. [9] *Р. Д. Гецадзе*, Сообщ. АН ГССР, т. 84 (1976).