ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXVI 1988 5

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Т. Ю. Сапонджян

Растяжение бесконечной пластинки с эллиптическим включением

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР В. С. Саркисяном 15/I 1988)

В статье приводится решение задачи о растяжении бесконечной пластинки с эллиптическим включением (с полуосями a и b) из другого материала, под действием постоянных напряжений, приложенных на бесконечности. Случаям анизотропных тел и плоским задачам для эллиптических включений посвящены работы ([1-5]).

1. Для случая, когда напряжения p направлены по большей оси эллипса (ось x), формулы Колосова—Мусхелишвили ([6]) представляются:

в области эллипса (область G_0)

$$\sigma_x+\sigma_y=2[\varphi_0^{*\prime}(z)+\overline{\varphi_0^{*\prime}(z)}],$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar z\varphi_0^{*\prime\prime}(z)+\Psi_0^{*\prime}(z)], \tag{1.1}$$

$$2\mu_0(u+iv)=\varkappa_0\varphi_0^*(z)-\overline{z\varphi_0^{*\prime}(z)}-\overline{\Psi_0^*(z)}; \tag{1.2}$$

для внешней области эллипса (область G_1)

$$\sigma_x+\sigma_y=p+2[\varphi_1^{*\prime}(z)+\overline{\varphi_1^{*\prime}(z)}],$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=-p+2[\bar z\varphi_1^{*\prime\prime}(z)+\Psi_1^{*\prime}(z)], \tag{1.3}$$

$$2\mu_1(u+iv)=(\varkappa_1-1)\frac{p}{4}z+\frac{p}{2}\bar z+\varkappa_1\varphi_1^*(z)-\overline{z\varphi_1^{*\prime}(z)}-\overline{\Psi_1^*(z)}, \tag{1.4}$$

здесь $\varphi_1^*(z)$ и $\Psi_1^*(z)$ голоморфны в области G_1 и обращаются в нуль на бесконечности.

Для определения искомых аналитических функций применим метод конформного отображения. Отобразим известной функцией

$$z=R\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right),\quad \zeta=\rho e^{i\vartheta},\quad \left(R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}\right), \tag{1.5}$$

внешность единичной окружности ($\rho=1$) на внешность разреза длиной $4R$ с центром, совпадающим с началом координат плоскости z, при этом ось x проходит вдоль разреза. Окружностям $\rho=\mathrm{const}$ соответствуют конфокальные эллипсы на плоскости z, один из которых, для $\rho=1$, обращается в указанный разрез. Обозначим через $\rho_0=$

$=\sqrt{(a+b)/(a-b)}$ радиус окружности на плоскости ζ, соответствующей эллипсу с полуосями a и b. Голоморфные в указанном кольце ($\rho=1$ и $\rho=\rho_0$) функции разлагаются в ряд Лорана. Н. И. Мусхелишвили (6) подчинил коэффициенты этого ряда условию, при котором новый ряд оказывается голоморфным в области неразрезанного эллипса. Такими рядами будем пользоваться при разложении в ряд функций

$$\varphi_0(\zeta)=\varphi_0^*(z),\quad \Psi_0(\zeta)=\Psi_0^*(z). \tag{1.6}$$

Учитывая симметрию задачи относительно осей x и y, будем иметь:

$$\varphi_0(\zeta)=\frac{pR}{4}\sum_1^\infty a_{2k-1}^{(0)}\left(\zeta^{2k-1}+\frac{1}{\zeta^{2k-1}}\right),$$

$$\Psi_0(\zeta)=\frac{pR}{4}\sum_1^\infty b_{2k-1}^{(0)}\frac{1}{1-\zeta^{-2}}\left(\zeta^{2k-1}-\frac{1}{\zeta^{2k+1}}\right). \tag{1.7}$$

Голоморфные в области G_1 функции

$$\varphi_1(\zeta)=\varphi_1^*(z),\quad \Psi_1(\zeta)=\Psi_1^*(z) \tag{1.8}$$

разлагаются в ряды

$$\varphi_1(\zeta)=\frac{pR}{4}\sum_1^\infty\frac{a_{2k-1}^{(1)}}{\zeta^{2k-1}},\qquad \Psi_1(\zeta)=\frac{pR}{4}\sum_1^\infty\frac{b_{2k-1}^{(1)}}{\zeta^{2k-1}}. \tag{1.9}$$

Главный вектор усилий, приложенных к дуге (s_0s), в области G_0 определяется по формуле

$$i\int_{s_0}^{s}(X_n+iY_n)ds=\varphi_0^*(z)+z\overline{\varphi_0^{*\prime}(z)}+\overline{\Psi_0^*(z)}, \tag{1.10}$$

аналогично, в области G_1

$$i\int_{s_0}^{s}(X_n+iY_n)ds=\frac{p}{2}(z-\bar z)+\varphi_1^*(z)+z\overline{\varphi_1^{*\prime}(z)}+\overline{\Psi_1^*(z)}. \tag{1.11}$$

2. Условия сопряжения упругих областей G_0 и G_1 получаются приравниванием выражений (1.10) и (1.11), а также перемещений (1.2) и (1.4). Переходя по (1.5) от z к ζ, будем иметь:

$$\varphi_0(\zeta_\gamma)+\frac{\zeta_\gamma+\zeta_\gamma^{-1}}{1-\bar\zeta_\gamma^{-2}}\overline{\varphi_0'(\zeta_\gamma)}+\overline{\Psi_0(\zeta_\gamma)}=\varphi_1(\zeta_\gamma)+\frac{\zeta_\gamma+\zeta_\gamma^{-1}}{1-\bar\zeta_\gamma^{-2}}\overline{\varphi_1'(\zeta_\gamma)}+$$

$$+\overline{\Psi_1(\zeta_\gamma)}+\frac{pR}{4}(\zeta_\gamma+\zeta_\gamma^{-1}-\bar\zeta_\gamma-\bar\zeta_\gamma^{-1}), \tag{2.1}$$

$$\varkappa_0\varphi_0(\zeta_\gamma)-\frac{\zeta_\gamma+\zeta_\gamma^{-1}}{1-\bar\zeta_\gamma^{-2}}\overline{\varphi_0'(\zeta_\gamma)}-\overline{\Psi_0(\zeta_\gamma)}=\lambda\Bigg[\varkappa_1\varphi_1(\zeta_\gamma)-\frac{\zeta_\gamma+\bar\zeta_\gamma^{-1}}{1-\bar\zeta_\gamma^{-2}}\overline{\varphi_1'(\zeta_\gamma)}-$$

$$-\overline{\Psi_1(\zeta_\gamma)}+(\varkappa_1-1)\frac{pR}{4}(\zeta_\gamma+\zeta_\gamma^{-1})+\frac{pR}{2}(\bar\zeta_\gamma+\bar\zeta_\gamma^{-1})\Bigg], \tag{2.2}$$

где

$$\lambda=\mu_0/\mu_1. \tag{2.3}$$

Умножая обе части этих уравнений на $(1-\bar{\zeta}_\gamma^{-2})=(1-\rho_0^{-4}\zeta_\gamma^2)$ и заменяя входящие в них искомые функции соответствующими рядами, далее сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{ik\theta}$ этих рядов, получаем алгебраические уравнения относительно указанных коэффициентов ([6]). Для случая первой основной внешней задачи, согласно ([6]), функция $\varphi(\zeta)$ определяется по формуле

$$\varphi(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\theta)}{\zeta_\gamma-\zeta}\,d\zeta_\gamma, \tag{2.4}$$

где $f(\theta)$—заданная на γ функция.

Учитывая, что

$$\varphi(\zeta)=\sum_{1}^{\infty}\frac{a_k}{\zeta^k}, \tag{2.5}$$

из (2.4) находим

$$a_1=\lim_{\zeta\to\infty}[\zeta\varphi(\zeta)]=\frac{\rho_0}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\theta)d\theta. \tag{2.6}$$

Для нашей задачи, согласно (2.1),

$$f(\theta)=\Big[\varphi_0(\zeta_\gamma)+\frac{\zeta_\gamma+\zeta_\gamma^{-1}}{1-\bar{\zeta}_\gamma^{-2}}\overline{\varphi_0'(\zeta_\gamma)}+\overline{\psi_0(\zeta_\gamma)}-\frac{pR}{2}(\zeta_\gamma+\zeta_\gamma^{-1}-$$

$$-\bar{\zeta}_\gamma-\bar{\zeta}_\gamma^{-1})\Big]\frac{4}{pR}. \tag{2.7}$$

Учитывая (1.7) и (1.8), а также равенства

$$\frac{1}{1-\rho_0^{-4}\zeta_\gamma^2}=\frac{1}{1-\rho_0^{-2}e^{2i\theta}}=\sum_{0}^{\infty}\frac{e^{2ki\theta}}{\rho_0^{2k}}, \tag{2.8}$$

из (2.6) с учетом (2.7) для нашей задачи находим

$$a_1^{(1)}=\rho_0^2[-(\rho_0^2-\rho_0^{-2})a_1^{(0)}+A+2(1-\rho_0^{-2})], \tag{2.9}$$

где
$$A=(\rho_0^2+\rho_0^{-2})\sum_{1}^{\infty}(2k-1)a_{2k-1}^{(0)}+\sum_{1}^{\infty}b_{2k-1}^{(0)}. \tag{2.10}$$

Аналогично из (2.2) имеем

$$i\varkappa_1a_1^{(1)}=\rho_0^2[(\varkappa_0\rho_0^{-2}+\rho_0^2)a_1^{(0)}-i(\varkappa_1-1)\rho_0^{-2}-2]. \tag{2.11}$$

Уравнения (2.9) и (2.11) являются теми уравнениями, которые теряются в ([6]) при решении задачи с помощью рядов. Поэтому полную систему уравнений, определяющих коэффициенты примененных рядов, мы получим, присоединив (2.9) и (2.11) к уравнениям, способ получения которых указан выше.

$$(\rho_0^4-1)a_1^{(0)}+a_1^{(1)}-\rho_0^2A=2(\rho_0^2-1),$$

$$2(\rho_0^2-\rho_0^{-2})a_1^{(0)}+2\rho_0^{-2}a_1^{(1)}-d_1^{(1)}=2(\rho_0^2-\rho_0^{-2}),$$

$$(\varkappa_0+\rho_0^4)a_1^{(0)}-i\varkappa_1a_1^{(1)}-\rho_0^2A=i(\varkappa_1-1)+2i\rho_0^2, \tag{2.12}$$

$$
\begin{gathered}
(\varkappa_0-1)(\rho_0^2-\rho_0^{-2})a_1^{(0)}+\lambda(\varkappa_1-1)\rho_0^{-2}a_1^{(1)}+\lambda d_1^{(1)}=\lambda(\varkappa_1-1)(\rho_0^2-\rho_0^{-2}),\\
(3\rho_0^4-\rho_0^{-4})\,a_3^{(0)}+\rho_0^2 b_1^{(0)}+\rho_0^{-4}a_3^{(1)}=-2a_1^{(0)}+a_1^{(1)}+2(1-\rho_0^2),\\
(\varkappa_0\rho_0^{-4}+3\rho_0^4)a_3^{(0)}+\rho_0^2 b_1^{(0)}-\lambda\varkappa_1\rho_0^{-4}a_3^{(1)}=(\varkappa_0-1)a_1^{(0)}-\lambda\varkappa_1 a_1^{(1)}-\lambda(\varkappa_1-1+2\rho_0^2),\\
(\rho_0^4-3\rho_0^{-4})a_3^{(0)}-\rho_0^{-2}b_1^{(0)}+3\rho_0^{-4}a_3^{(1)}-\rho_0^{-2}d_3^{(1)}=2a_1^{(0)}-a_1^{(1)}+2(\rho_0^{-2}-1), \qquad (2.13)\\
(\varkappa_0\rho_0^4+3\rho_0^{-4})a_3^{(0)}+\rho_0^{-2}b_1^{(0)}-3\lambda\rho_0^{-4}a_3^{(1)}+\lambda\rho_0^{-2}d_3^{(1)}=(\varkappa_0-1)a_1^{(0)}+\lambda a_1^{(1)}-\lambda(\varkappa_1-1+2\rho_0^{-2}).
\end{gathered}
$$

Покажем теперь, что $a_3^{(0)}=0$. Из первых двух уравнений (2.13) имеем

$$(\varkappa_0+1)a_3^{(0)}-(\lambda\varkappa_1+1)a_3^{(1)}=\rho_0^4[(\varkappa_0+1)a_1^{(0)}-(\lambda\varkappa_1+1)a_1^{(1)}-\lambda(\varkappa_1-1+2\rho_0^2)-2(1-\rho_0^2)],$$

а из первого и третьего уравнений (2.12) получаем

$$(\varkappa_0+1)a_1^{(0)}-(\lambda\varkappa_1+1)a_1^{(1)}=\lambda(\varkappa_1-1)+2\lambda\rho_0^2-2(\rho_0^2-1), \qquad (2.14)$$

отсюда следует, что $a_3^{(1)}=\dfrac{\varkappa_0+1}{\lambda\varkappa_1+1}a_3^{(0)}$.

Подставляя полученное равенство в первое уравнение (2.13), имеем

$$\rho_0^6 b_1^{(0)}+\left(\frac{\varkappa_0+1}{\lambda\varkappa_1+1}+3\rho_0^8-1\right)a_3^{(0)}=-2\rho_0^4 a_1^{(0)}+\rho_0^4 a_1^{(1)}+2\rho_0^4(1-\rho_0^2),$$

далее из третьего и чертвертого уравнений (2.13) получаем

$$[\lambda(\rho_0^4-3\rho_0^{-4})+\varkappa_0\rho_0^4+3\rho_0^{-4}]a_3^{(0)}+\rho_0^{-2}(1-\lambda)b_1^{(0)}=(2\lambda+\varkappa_0-1)a_1^{(0)}-\lambda(\varkappa_1+1),$$

учитывая последнее равенство, находим

$$
\begin{gathered}
\left\{(1-\lambda)\left(\frac{\varkappa_0+1}{\lambda\varkappa_1+1}+3\rho_0^8-1\right)-\rho_0^8[\lambda(\rho_0^4-3\rho_0^{-4})+\varkappa_0\rho_0^4+3\rho_0^{-4}]\right\}a_3^{(0)}=\\
=-\rho_0^4\{(1-\lambda)[-2a_1^{(0)}+a_1^{(1)}+2(1-\rho_0^2)]-\rho_0^4[(2\lambda+\varkappa_0-1)a_1^{(0)}+\lambda(\varkappa_1+1)]\}. \qquad (2.15)
\end{gathered}
$$

С другой стороны, из второго и четвертого уравнений (2.12) имеем

$$(\rho_0^2-\rho_0^{-2})(2\lambda+\varkappa_0-1)a_1^{(0)}+\rho_0^{-2}\lambda(\varkappa_1+1)a_1^{(1)}=\lambda(\rho_0^2-\rho_0^{-2})(\varkappa_1+1).$$

Учитывая последнее равенство, а также (2.14), после очевидных преобразований получаем

$$(1-\lambda)[-2a_1^{(0)}+a_1^{(1)}+2(1-\rho_0^2)]-\rho_0^4[(2\lambda+\varkappa_0-1)a_1^{(0)}+\lambda(\varkappa_1+1)]=0,$$

что совпадает с правой частью (2.15). Отсюда легко заключить, что $a_{2k-1}^{(0)}=b_{2k-1}^{(0)}=a_{2k-1}^{(1)}=0$ при $k=2, 3, \ldots,$ $d_{2k-1}^{(1)}=0$ при $k=3, 4, \ldots$.

Таким образом,

$$
\begin{gathered}
a_1^{(0)}=\frac{\lambda(\varkappa_1+1)[(\lambda\varkappa_1+1)(\rho_0^4-1)+\lambda(\varkappa_1-1)+2\lambda\rho_0^2-2(\rho_0^2-1)]}{(\rho_0^4-1)(2\lambda+\varkappa_0-1)(\lambda\varkappa_1+1)+\lambda(\varkappa_1+1)(\varkappa_0+1)}\\
a_1^{(1)}=\frac{1}{\lambda\varkappa_1+1}[(\varkappa_0+1)a_1^{(0)}-\lambda(\varkappa_1-1)-2\lambda\rho_0^2+2(\rho_0^2-1)],\\
A=\rho_0^{-2}[(\rho_0^4-1)a_1^{(0)}+a_1^{(1)}-2(\rho_0^2-1)], \qquad (2.16)\\
d_1^{(1)}=\rho_0^{-2}[2(\rho_0^4-1)a_1^{(0)}+2a_1^{(1)}-2(\rho_0^4-1)],
\end{gathered}
$$

$$b_1^{(0)}=\rho_0^{-2}[-2a_1^{(0)}+a_1^{(1)}+2(\rho_0^{-2}-1)],$$

$$d_3^{(1)}=(\rho_0^2-\rho_0^{-2})(-2a_1^{(0)}+a_1^{(1)}+2),$$

где $d_{2k-1}^{(1)}=b_{2k-1}^{(1)}-b_{2k-3}^{(1)}$, $(k=1, 2, \ldots)$, при этом $b_{-1}^{(0)}=0$, $b_1^{(1)}=d_1^{(1)}$, $b_3^{(1)}=b_5^{(1)}=b_7^{(1)}=\ldots=d_1^{(1)}+d_3^{(1)}$.

Тогда с учетом (1.7) и (1.9) решение задачи получим в замкнутом виде

$$\varphi_0(\zeta)=\frac{pR}{4}a_1^{(0)}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right),\quad \Psi_0(\zeta)=\frac{pR}{4}b_1^{(0)}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right),$$

$$\varphi_1(\zeta)=\frac{pR}{4}a_1^{(1)}\frac{1}{\zeta},\quad \Psi_1(\zeta)=\frac{pR}{4}\frac{1}{\zeta}\left[d_1^{(1)}+(d_1^{(1)}+d_3^{(1)})\frac{1}{\zeta^2}\left(1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\zeta^2}+\frac{1}{\zeta^4}+\frac{1}{\zeta^6}+\ldots\right)\right]=\frac{pR}{4}\frac{1}{\zeta}\left[d_1^{(1)}+(d_1^{(1)}+d_3^{(1)})\frac{1}{\zeta^2-1}\right]. \tag{2.17}$$

Замечание. Для величины A имеем два значения (2.10) и (2.16). Учитывая найденные выражения для коэффициентов $a_1^{(0)}$ и $b_1^{(0)}$, непосредственно видим, что указанные два значения одинаковы.

Отметим также, что при переходе от эллипса к кругу $(a=b)$ полученные результаты полностью совпадают с ([6]).

3. Аналогично первому случаю найдено замкнутое решение для второго случая, когда напряжения p направлены по малой оси эллипса (ось y). Для внешней области

$$\sigma_x+\sigma_y=p+2[\varphi_1'^*(z)+\overline{\varphi_1'^*(z)}],$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=p+2[\bar{z}\varphi_1''^*(z)+\Psi_1'^*(z)],$$

$$2\mu_1(u+iv)=\frac{p}{4}(\varkappa_1-1)z-\frac{p}{2}\cdot\bar{z}+\varkappa_1\varphi_1^*(z)-z\cdot\overline{\varphi_1'^*(z)}-\overline{\Psi_1^*(z)},$$

а в области эллипса выражения совпадают с (1.1) и (1.2).

Аналитические функции φ_i, Ψ_i $(i=0, 1)$ определяются по формулам (2.17), где отличные от нуля коэффициенты имеют следующие значения:

$$a_1^{(1)}=\frac{\lambda(\varkappa_1+1)[(\lambda\varkappa_1+1)(\rho_0^4-1)+\lambda(\varkappa_1-1)-2\lambda\rho_0^2+2(\rho_0^2+1)]}{(\rho_0^4-1)(2\lambda+\varkappa_0-1)(\lambda\varkappa_1+1)+\lambda(\varkappa_1+1)(\varkappa_0+1)},$$

$$a_1^{(1)}=\frac{1}{\lambda\varkappa_1+1}[(\varkappa_0+1)a_1^{(0)}-\lambda(\varkappa_1-1)+2\lambda\rho_0^2-2(\rho_0^2+1)],$$

$$A=\rho_0^{-2}[(\rho_0^4-1)a_1^{(0)}+a_1^{(1)}+2(\rho_0^2+1)],$$

$$d_1^{(1)}=\rho_0^{-2}[2(\rho_0^4-1)a_1^{(0)}+2a_1^{(1)}-2(\rho_0^4-1)],$$

$$b_1^{(0)}=\rho_0^{-2}[-2a_1^{(0)}+a_1^{(1)}+2(\rho_0^2+1)],$$

$$d_3^{(1)}=\rho_0^2[-2a_1^{(0)}+a_1^{(1)}-\rho_0^{-2}b_1^{(0)}+2(\rho_0^{-2}+1)].$$

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Տ. ՅՈՒ. ՍԱՊՈՆՋՅԱՆ

Էլիպսական ներդրակով անվերջ սալի ձգումը

Աշխատանքում ստացված է առաձգական էլիպսական ներդրակով, անվերջ իզոտրոպ սալի անվերջությունում կիրառված հաստատուն լարումներով ձգման խնդրի փակ լուծումը, որի մեթոդը հիմնված է կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության կիրառման վրա։

Խնդրի ընդհանուր լուծումը ներկայացվում է Կոլոսով-Մուսխելիշվիլիի հիմնական բանաձևերով։

Վերածելով որոնելի ֆունկցիաները Լորանի շարքի և կիրառելով Կոշու տիպի ինտեգրալը, խնդրի լուծումը բերվում է վերջավոր թվով գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի լուծման։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. А. Швецов*, в кн.: «Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел», вып. 3, Саратов, 1967. [2] *С. А. Калоеров*, в кн.: «Механика твердого тела», вып. 2, Киев, 1970. [3] *С. А. Калоеров*. Изв. АН АрмССР Механика, т 20, № 3 (1967). [4] *В. В. Мечменский*. Концентрация напряжений около эллиптических упругих включений в тонкой анизотропной среде. Изв. АН СССР, МТТ, № 6 (1970). [5] *О. С. Космодаміанський*, *М. М. Нескородов*, в кн.: «Теоретична і прикладная механіка», вып. 2, Харків, 1971. [6] *Н. И. Мусхелишвили*. Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., Изд-во АН СССР, 1954.