ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVI 1988 5

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Талалян

Сходимость по мере и метрический изоморфизм

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 11/II 1988)

Сначала напомним некоторые определения.

Отображение одного пространства с мерой на другое называется изоморфным, если оно взаимно-однозначно и как оно, так и обратное ему отображение переводит всякое измеримое множество в измеримое множество той же меры. В том случае, когда оба пространства совпадают, изоморфизм называется автоморфизмом. Два пространства, допускающие изоморфные отображения друг на друга, называются изоморфными. Две функции f и f', определенные, соответственно, на пространствах M и M', называются изоморфными, если существуют такие множества $N \subset M$ и $N' \subset M'$ меры нуль и такое изоморфное отображение T пространства $M \setminus N$ на пространство $M' \setminus M'$, что $f(x) = f'(Tx)$ для всякого $x \in M \setminus N$. В этом случае говорят также, что функции f и f' принадлежат к одному метрическому типу ([1]).

Для пространств (X, μ), изоморфных отрезку $[0, 1]$ с мерой Лебега, в работе ([2]) доказано, что для любой последовательности f_n действительных измеримых функций на X, сходящейся по мере к функции f, существует такая последовательность S_n автоморфизмов пространства X, что $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(S_n(x)) = f(x)$ для μ — п. в. x.

Таким образом, функции, являющиеся членами сходящейся по мере последовательности, можно заменить метрически изоморфными им функциями так, чтобы полученная последовательность сходилась почти всюду. При этом построенная в ([2]) последовательность автоморфизмов S_n сходится к тождественному автоморфизму в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное n_0, что для всякого $n > n_0$ $\mu\{x \in X : S_n(x) \neq x\} < \varepsilon$.

Приведенное автором доказательство этого результата основано на понятии метрического типа измеримых функций и использует классификационную теорему В. А. Рохлина ([1]).

В настоящей заметке доказывается указанный результат без помощи классификационной теоремы, используется лишь классическая теорема Н. Н. Лузина. При этом рассматривается несколько более общая ситуация.

Теорема. *Пусть X — компактное метрическое пространство с метрикой ρ_X, μ — регулярная борелевская неатомическая мера на X, $\mu(X) < \infty$. Предположим, что измеримые подмножества X с* *равными μ-мерами изоморфны. Пусть, далее, (Y, ρ_Y) — сепарабельное метрическое пространство и φ_n — последовательность измеримых функций на X со значениями в Y, сходящаяся по мере на X к функции φ. Тогда существует последовательность автоморфизмов S_n пространства (X, μ) такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(S_n(x)) = \varphi(x) \text{ для } \mu\text{— п. в. } x.$$

При этом последовательность автоморфизмов S_n сходится к тождественному автоморфизму в следующем смысле: для любого $\varepsilon>0$ существует такое натуральное n_0, что для всякого $n>n_0$

$$\mu\{x\in X : S_n(x)\neq x\}<\varepsilon.$$

Доказательство. Очевидно, можно считать $\mu(X)=1$. Предположим сначала, что функция φ непрерывна. Выберем числа $\alpha_n>0$ так, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)=0, \tag{1}$$

где $E_n=\{x\in X : \rho_Y(\varphi_n(x), \varphi(x))\geq\alpha_n\}$.

Здесь, без ограничения общности, мы можем считать, что $\mu(E_n)>0$ для всех n.

Для любого натурального k пусть $\{x_{k,1}, \ldots, x_{k,q_k}\}$ есть $1/k$-сеть в X. В силу второго равенства в (1) можно построить натуральные числа $m_1<m_2<\ldots<m_k<\ldots$ так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k\mu(E_{m_k})<\infty. \tag{2}$$

Далее, выберем натуральные числа $p_1<p_2<\ldots<p_k<\ldots$ так, чтобы

$$\mu(E_n)\leq\mu(E_{m_k}) \text{ при } n>p_k. \tag{3}$$

В дальнейшем через $B(x; r)$ мы обозначим открытый шар в пространстве X с центром в точке x радиуса r.

Перейдем к построению автоморфизмов S_n. При $n\leq p_1$ будем считать, что S_n совпадает с тождественным автоморфизмом. Пусть $p_k<n\leq p_{k+1}$. Положим

$$A_{n,1}=E_n\cap B(x_{k,1};1/k);$$

$$A_{n,j}=E_n\cap\left[B\left(x_{k,j};\frac{1}{k}\right)\setminus\bigcup_{i=1}^{j-1}B\left(x_{k,i};\frac{1}{k}\right)\right],\ j=2, \ldots, q_k.$$

Так как мера μ неатомическая, то существуют борелевские множества $G_{k,1}\subset B(x_{k,1}; 1/k)$

и $G_{k,j}\subset B\left(x_{k,j};\frac{1}{k}\right)\setminus\bigcup_{i=1}^{j-1}B\left(x_{k,i};\frac{1}{k}\right)$, $j=2, \ldots, q_k$

такие, что $\mu(G_{k,1})=\min(\mu(B(x_{k,j}; 1/k)), \mu(E_{m_k}))$

и $\mu(G_{k,j})=\min\left(\mu\left(B\left(x_{k,j};\frac{1}{k}\right)\setminus\bigcup_{i=1}^{j-1}B\left(x_{k,i};\frac{1}{k}\right)\right), \mu(E_{m_k}), \right), j=2, \ldots, q_k$

Тогда в силу (3) имеем

$$\mu(A_{n,j})\le\mu(G_{k,j}) \text{ при } p_k<n\le p_{k+1},\ 1\le j\le q_k. \tag{4}$$

Далее, полагая $G_k=\bigcup_{j=1}^{q_k} G_{j,k}$, в силу (2) будем иметь

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} G_k\right)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} G_k\right)\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\mu(G_k)\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}q_k\mu(E_{m_k})=0. \tag{5}$$

Согласно допущениям относительно меры μ и в силу (4), для каждого $j=1,\ldots,q_k$ существует изоморфное отображение $\sigma_{n,j}$ множества $A_{n,j}\setminus G_{k,j}$ на некоторое подмножество множества $G_{k,j}\setminus A_{n,j}$. Теперь, учитывая то, что согласно построению множества $A_{n,1},\ldots,A_{n,q_k}$ между собой и множества $G_{k,1},\ldots,G_{k,q_k}$ между собой попарно не пересекаются, положим

$$\sigma_n(x)=\begin{cases}\sigma_{n,j}(x), \text{ если } x\in A_{n,j}\setminus G_{k,j},\ j=1,\ldots,q_k\\ \sigma_{n,j}^{-1}(x), \text{ если } x\in\sigma_{n,j}(A_{n,j}\setminus G_{k,j}),\ j=1,\ldots,q_k\\ x, \text{ если } x\notin\bigcup_{j=1}^{q_k}[(A_{n,j}\setminus G_{k,j})\cup\sigma_{n,j}(A_{n,j}\setminus G_{k,j})]\end{cases} \tag{6}$$

Заметим, что для любого натурального k

$$\bigcup_{n=p_k+1}^{p_{k+1}}\bigcup_{j=1}^{q_k}\sigma_n(A_{n,j})\subset G_k. \tag{7}$$

Положим $S_n=\sigma_n^{-1}$. Очевидно S_n есть автоморфизм пространства с мерой (X,μ). При этом имеет место неравенство

$$\rho_X(S_n(x),x)<2/k \text{ для всех } x\in X \text{ и } p_k<n<p_{k+1}.$$

Отсюда, в силу непрерывности φ, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(S_n(x))=\varphi(x). \tag{8}$$

Далее, в силу (7) имеем

$$\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{n=l}^{\infty}\sigma_n(E_n)=\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{n=p_l+1}^{\infty}\sigma_n(E_n)=\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{k=l}^{\infty}\bigcup_{n=p_k+1}^{p_{k+1}}\sigma_n(E_n)=$$

$$=\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{k=l}^{\infty}\bigcup_{n=p_k+1}^{p_{k+1}}\bigcup_{j=1}^{q_k}\sigma_n(A_{n,j})\subset\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{k=l}^{\infty}G_k.$$

Отсюда и из (5) следует

$$\mu\left(\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{n=l}^{\infty}\sigma_n(E_n)\right)=0. \tag{9}$$

Если $x\in X\setminus\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{n=l}^{\infty}\sigma_n(E_n)$, то начиная с некоторого номера $S_n(x)\in\in X\setminus E_n$. Таким образом, почти все точки x обладают тем свойством, что начиная с некоторого (зависящего от x) номера $N(x)$ имеет место неравенство

$$\rho_Y(\varphi_n(S_n(x)),\varphi(S_n(x)))<\alpha_n,\ n>N(x). \tag{10}$$

Тогда в силу (8) и (10) из неравенства

$$\rho_Y(\varphi_n(S_n(x)),\ \varphi(x)) \leq \rho_Y(\varphi_n(S_n(x)),\ \varphi(S_n(x))) + \rho_Y(\varphi(S_n(x)),\ \varphi(x))$$

получим $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(S_n(x)) = \varphi(x)$ для μ—п. в. x.

Пусть теперь φ есть произвольная измеримая функция на X со значениями в сепарабельном метрическом пространстве Y. Применяя теорему Лузина ([3], с. 89), можно построить последовательность попарно непересекающихся компактных множеств A_k таких, что функция φ, рассмотренная только на A_k, является непрерывной функцией на A_k для каждого $k=1, 2, \ldots$ и имеет место

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = 1.$$

В силу доказанного частного случая, для каждого k существует последовательность автоморфизмов $S_{k,n}$, $n=1, 2, \ldots$ множества A_k такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(S_{k,n}(x)) = \varphi(x)$, для μ—п. в. $x \in A_k$.

Теперь очевидно, что полагая при любом n

$$S_n(x) = S_{k,n}(x) \text{ при } x \in A_k,\ k=1, 2, \ldots,$$

мы получим последовательность автоморфизмов, удовлетворяющую всем утверждениям теоремы.

Институт прикладных проблем физики
Академии наук Армянской ССР

Յ. Ա. ԹԱԼԱՅԱՆ

Զուգամիտություն ըստ չափի և մետրիկական իզոմորֆիզմ

Ապացուցվում է հետևյալը։

Թեորեմ. *Ենթադրենք X-ը կոմպակտ մետրիկական տարածություն է, μ-ն ռեգուլյար բորելյան չափ X-ի վրա այնպիսին, որ $\mu(X)<\infty$ և X-ի հավասար μ-չափ ունեցող չափելի ենթաբազմությունները իզոմորֆ են։ Ենթադրենք, բացի այդ, որ Y-ը սեպարաբել մետրիկական տարածություն է, և $\{\varphi_n: X \to Y,\ n=1, 2, \ldots\}$ չափելի ֆունկցիաների հաջորդականություն է, որը X-ի վրա ըստ չափի զուգամիտում է φ ֆունկցիային։ Այդ դեպքում գոյություն ունի (X, μ) տարածության ավտոմորֆիզմների այնպիսի S_n հաջորդականություն, որ*

1) *Յանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 բնական թիվ, որ երբ $n>n_0$, ապա $\mu\{x\in X: S_n(x)\neq x\}<\varepsilon$*

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(S_n(x))=\varphi(x)$ *համարյա ամենուրեք։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. А. Рохлин*, УМН, т. 12, вып. 2(74), с. 169—174 (1957). [2] *Н. Н. Требукова*, УМН, т. 15, вып. 2(92), с. 195—199 (1960) [3] *Г. Федерер*, Геометрическая теория меры, Наука, М., 1987.