ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVI 1988 5

УДК 517.554

МАТЕМАТИКА

М. В. Казарян

О теореме «острие клина» для мероморфных функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 11/II 1988)

Классическая теорема об «острие клина» Н. Н. Боголюбова (см., например, [1,2]) имеет множество различных обобщений как по направлению усложнения областей, так и в связи с различными условиями совпадения функций на острие клина. В настоящей работе мы рассмотрим некоторые возможные варианты распространения теоремы Боголюбова на мероморфные функции.

Пусть D^+ и D^-—области в $\mathbf{C}^N$ и функции $f^{\pm}$ голоморфны соответственно в $D^{\pm}$. Если $D^+\cap D^-$—тоже область и функции f^+, f^- совпадают в вещественной окрестности некоторой точки $z^0\in D^+\cap D^-$, то они являются голоморфным продолжением одна другой, т. е. существует функция f, голоморфная в $D^+\cup D^-$ и такая, что $f|_{D^{\pm}}=f^{\pm}$. Теорему об „острие клина" Боголюбова можно рассматривать как граничную теорему о продолжении такого типа, когда $D^+\cap D^-$ пусто, но $\partial D^+\cap\partial D^-$ содержит область в $\mathbf{R}^N$ и предельные значения $f^{\pm}$ в этой области совпадают. Простейший содержательный случай в этом направлении получается при $N=1$. Если $D^{\pm}$ лежат соответственно в верхней и нижней полуплоскости и интервал $\Delta\subset\mathbf{R}$ есть общая открытая часть их границ, то, как хорошо известно, функции $f^{\pm}$, голоморфные в $D^{\pm}$, непрерывные на $D^{\pm}\cup\Delta$ соответственно и совпадающие на Δ, образуют единую голоморфную функцию в области $D^+\cup\Delta\cup D^-$.

Основные трудности, возникающие при переходе от голоморфных функций к мероморфным, связаны с понятием совпадения мероморфных функций f^+ и f^- на общей части границы $D^+\cup D^-$ (сложным даже в случае $N=1$).

Рассмотрим несколько естественных определений этого понятия в классической ситуации теоремы Боголюбова: D—область в $\mathbf{C}^N$ такая, что $M=D\cap\mathbf{R}^N$ связно и $D^{\pm}=\{z\in D:\pm y_j>0,\ j=1, 2, \ldots, N\}$ (здесь $z=x+iy$, x, $y\in\mathbf{R}^N$).

1. Простейший случай — это когда функции $f^{\pm}$, мероморфные соответственно в $D^{\pm}$, продолжаются на острие M как отображение в сферу Римана $\overline{\mathbf{C}}$ и эти продолжения совпадают на M (тем самым на M не допускаются точки неопределенности). Тогда для каждой точки $z^0\in M$ найдется окрестность $U\subset D$ такая, что либо $f^{\pm}$, либо $1/f^{\pm}$ голоморфны в $D^{\pm}\cap U$, непрерывны в $(D^{\pm}\cup M)\cap U$ и совпадают

на $M \cap U$. По теореме Боголюбова, $f^{\pm}$ или $1/f^{\pm}$ голоморфно продолжаются в некоторую окрестность V точки z^0 в $\mathbb{C}^N$ и, значит, в обоих случаях $f^{\pm}$ продолжается до функции, мероморфной в $D^+ \cup V \cup D^-$. Из теоремы единственности следует, что $f^{\pm}$ допускают мероморфное продолжение в область $D^+ \cup \Omega \cup D^-$, где Ω — некоторая окрестность M в $\mathbb{C}^N$.

2. Хорошо известно, что функции $f^{\pm}$, мероморфные соответственно в $D^{\pm}$, представляются в виде отношений $h^{\pm}/g^{\pm}$, где функции h^+ и g^+ голоморфны в D^+, а h^- и g^- в D^-. Предположим, что каждая из этих функций непрерывно продолжается на острие M и там имеет место равенство $h^+(x) \cdot g^-(x) = h^-(x) \cdot g^+(x)$. Это условие, очевидно, выполняется, когда f^+ и f^- мероморфны в окрестности M и там совпадают. Оказывается, при этом естественном условии совпадения мероморфного продолжения в окрестности острия в общем случае нет. Контрпример получается уже при $N=1$.

Пусть $D^{\pm} = \{z \in \mathbb{C} : \pm y > 0\}$, $M = \mathbb{R}$ и $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k}{z - i/k^2}$, где числа a_k такие, что ряд сходится равномерно внутри области $\mathbb{C} \setminus \{0, i, i/4, i/9, \ldots\}$. Положим $h^+(z) = z \cdot f(z) \cdot B(z)$, $g^+(z) = z \cdot B(z)$, где $B(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{z - i/k^2}{z + i/k^2}$ — произведение Бляшке, голоморфное и равномерно ограниченное в D^+. Функции $h^+(z)$ и $g^+(z)$, очевидно, голоморфны в D^+, а $f^+(z) = f|_{D^+} = h^+(z)/g^+(z)$ мероморфна в D^+. Пусть, далее, $h^-(z) = f(z)$, $g^-(z) = 1$ и $f^-(z) = h^-(z) = f|_{D^-}$ в D^-. Легко видеть, что функции $h^{\pm}$ и $g^{\pm}$ непрерывно продолжаются на $D^{\pm} \cup M$ и на M справедливо равенство $h^+ \cdot g^- = h^- \cdot g^+$. Однако мероморфное продолжение через точку $z=0$ невозможно, потому что она является предельной точкой для полюсов функции f^+.

Отметим, что в частном случае, когда $g^{\pm}$ (или $h^{\pm}$) голоморфно продолжаются в окрестность острия (например, когда $g^{\pm}$ — многочлены), мероморфное продолжение $f^{\pm}$ на M следует из теоремы Боголюбова. В самом деле, тогда существует окрестность $U \supset M$, такая, что функции $g^{\pm}$ голоморфны в U, а $h^{\pm} \cdot g^{\mp}$ и $h^- \cdot g^+$ голоморфны соответственно в $D^{\pm} \cap U$, непрерывно продолжаются на $(D^{\pm} \cap U) \cup M$ и (по нашему условию) совпадают на M. Пусть φ — голоморфное продолжение $h^{\pm} \cdot g^{\mp}$ в окрестность острия из теоремы Боголюбова, тогда функция $f = \varphi/(g^+ \cdot g^-)$ мероморфна в U и $f|_{D_{\pm}} = h^{\pm}/g^{\pm} = f^{\pm}$, т. е. f — искомое продолжение.

3. Контрпример в случае 2 оказался возможным из-за того, что принятое там условие совпадений не контролирует поведение полюсов (и точек неопределенности в общем случае) в окрестности M. Поэтому можно заранее предположить, что полярные множества функций $f^{\pm}$ „хорошо согласуются" на M, т. е. существует $(N-1)$-мерное аналитическое множество A в некоторой окрестности $U \supset M$ такое, что полярные множества $P_{f^{\pm}} \cap U \subset A$. Вне $M \cap A$ потребуем обычное совпадение голоморфных функций: $f^{\pm}$ непрерывно продолжаются на $(D^{\pm} \cup M) \cap (U \setminus A)$ и совпадают на $M \setminus A$. При таком условии совпадения тоже имеет место аналог теоремы Боголюбова, ко-

торый также сводится к голоморфному случаю. Действительно, в окрестности произвольной точки $z^0 \in M$ множество A либо пусто, либо задается одной голоморфной функцией, скажем $A \cap V = \{\varphi = 0\}$ (V — окрестность z^0). Так как $f^\pm$ мероморфны и A есть локально конечное объединение своих неприводимых компонент (см., например, ([1])), то существует число s такое, что функции $f^\pm \cdot \varphi^s$ голоморфны соответственно в $D^\pm \cap V$, непрерывны в $(D^\pm \cup M) \cap V$ и совпадают на $M \cap V$. По теореме Боголюбова они голоморфно продолжаются в окрестность z^0 и, значит, $f^\pm$ мероморфно продолжаются в эту окрестность. Глобальное продолжение в окрестность M следует из теоремы единственности.

4. Пусть для простоты D — шар $B(0, r)$ и функции $f^\pm$, голоморфные соответственно в $D^\pm$, удовлетворяют условиям теоремы Боголюбова. Комплексная прямая L вида $z = a + \lambda b$, где $a \in M$, $b \in D^+$, $\lambda \in \mathbf{C}$, пересекает D по кругу, а $D^\pm \cap L$ — полукруги с общим отрезком границы $\Delta = M \cap L$. На этой плоскости функции $f^\pm$, совпадающие на Δ, образуют единую голоморфную функцию в $D \cap L$. Это свойство дает возможность принять следующие определения совпадений $f^\pm$ на M. Можно требовать, чтобы для каждой комплексной прямой L указанного вида сужения функции $f^\pm$ на L мероморфно продолжались на $L \cap D$ и чтобы для любых L и L' указанного вида эти продолжения совпадали на $L \cap L'$ (как отображения в $\overline{\mathbf{C}}$). Но это очень сильное условие, и для справедливости теоремы можно брать не все L, а лишь некоторое их подсемейство. Пусть $\mathcal{L}$ есть семейство комплексных прямых в $\mathbf{C}^N$ вида $L: z = a + \lambda b^j$, $\lambda \in \mathbf{C}$, где $a \in M$ — произвольное и $\{b^1, b^2, \ldots, b^N\} \subset D^+$ — фиксированный набор линейно-независимых векторов. Предположим, что для каждой прямой $L \in \mathcal{L}$ функции $f^\pm|_{D^\pm \cap L}$ мероморфно продолжаются на $D \cap L$ и для любых различных L, $L' \in \mathcal{L}$ эти продолжения совпадают в точке $L \cap L' \in M$, т. е. образуют единую функцию на M (со значением в $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$). Сделаем $\mathbf{C}$-линейное преобразование l пространства $\mathbf{C}^N$ с вещественными коэффициентами, сохраняющее $\mathbf{R}^N$ и переводящее векторы b^j в базисные векторы $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = e^j$ (1 на j-ом месте), $j = 1, 2, \ldots, N$. Тогда функции $f^\pm \circ l^{-1}$ определяют единую функцию f на множестве $X = (D_1 \times E_2 \times \ldots \times E_N) \cup \ldots \cup (E_1 \times \ldots \times E_{N-1} \times D_N) \subset \mathbf{C}^N$, где $D_j = l(D) \cap \mathbf{C}_{z_j}$ и E_j — отрезок вида $|x_j| \leq r$ на оси x_j, $j = 1, 2, \ldots, N$. По построению f сепаратно мероморфна на X, а тогда по теореме автора (см. ([4]), теорема 2) она продолжается до функции $\tilde{f}$, мероморфной в области $\Omega \supset X$. Так как $\tilde{f}|_{X \cap l(D^\pm)} = f^\pm|_{X \cap l(D^\pm)}$, то из теоремы единственности следует, что функция $\hat{f}$, равная $\tilde{f}$ в Ω и $f^\pm$ соответственно в $D^\pm$, мероморфна в области $D^+ \cup \Omega \cup D^-$ и является искомым продолжением $f^\pm$.

По существу мы доказали следующее

Предложение. *Пусть функция f мероморфна в областях D^+ и D^-, а на M определена как отображение в $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Предположим, что сужение f на каждую комплексную прямую $L \in \mathcal{L}$ является мероморфной функцией в одномерной области $D \cap L$.*

Тогда существует окрестность $\Omega \supset M$ в $\mathbb{C}^N$ такая, что f продолжается до функции, мероморфной в $D^+ \cup \Omega \cup D^-$.

Отметим, что условие совпадения продолжений $f^{\pm}|_{D^{\pm} \cap L}$ на $L \cap L'$ для $L, L' \in \mathfrak{L}$ необходима. Это видно из следующего простого примера. Функция $f(z) = \exp\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)$ голоморфна в $D^+ \cup D^-$ (в $\mathbb{C}^2$) и ее сужение на любую комплексную прямую $L: z = a + ib$, $a \in \mathbb{R}^2$, $b \in D^+$, голоморфно при $a \neq 0$, так как все особенности f лежат на прямой $z_1 + z_2 = 0$. На прямой $L: z = ib$, $b \in D^+$, сужение f равно $\exp\left(\frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}\right)$, т. е. постоянно (в частности, голоморфно продолжается на $L \cap D$), но эти константы для различных L различны и функция $f|_{D^+ \cup D^-}$, очевидно, не продолжается мероморфно в окрестность M.

В заключение приведем формулировку теоремы «острие клина» для мероморфных функций, аналогичную классической теореме Н. Н. Боголюбова и вытекающую из предыдущих рассуждений.

Теорема. *Пусть область D в $\mathbb{C}^N$ такая, что $M = D \cap \mathbb{R}_N$ связно, $D^{\pm} = \{z \in D: \pm y_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, N\}$, функции $f^{\pm}$ мероморфны соответственно в областях $D^{\pm}$ и совпадают на M в смысле пунктов 1, 3 или 4. Тогда существует окрестность $\Omega \supset M$ и мероморфная в $D^+ \cup \Omega \cup D^-$ функция f такая, что $f|_{D^{\pm}} = f^{\pm}$.*

Вычислительный центр Госплана
Армянской ССР

Մ. Վ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Մերոմորֆ ֆունկցիաների համար «սեպի սուր ծայրի» թեորեմի մասին

Հոդվածում դիտարկվում են Ն. Ն. Բոգոլյուբովի $\mathbb{C}^N$-ում, $N>1$ անալիտիկ շարունակության մասին հանրահայտ թեորեմի որոշ ընդհանրացումներ մերոմորֆ ֆունկցիաների դասում։

Հիմնական դժվարությունը, որ ծագում է հոլոմորֆ ֆունկցիաներից մերոմորֆներին անցնելու ժամանակ, կապված է երկու մերոմորֆ ֆունկցիաների եզրային արժեքների «համընկնելու» գաղափարի հետ սեպի սուր ծայրի վրա։

Դա այնքան էլ պարզ չէ անգամ $N=1$ դեպքում, հարթության վրա, երբ մերոմորֆ ֆունկցիաների բևեռային կետերի բազմությունը դիսկրետ է։ Շատ կոմպլեքս փոփոխականների դեպքում մերոմորֆ ֆունկցիաները, բացի բևեռային բազմությունից, որը դիսկրետ չէ, կարող են ունենալ նաև անորոշության կետեր, որոնց կամայական շրջակայքում ֆունկցիան կարող է ընդունել ցանկացած արժեք։ Թեորեմի իրավացիությունը կախված է համընկնելիության սահմանումից, որի հնարավոր տարբերակները դիտարկվում են հոդվածում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов*, Вопросы теории дисперсионных соотношений, Физматгиз, М., 1958. [2] *В. С. Владимиров*. Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 26, с. 825—838 (1962). [3] *Е. М. Чиркс*, Комплексные аналитические множества, Наука, М., 1985. [4] *М. В. Казарян*, Мат. сб., т. 125(167), № 3(11), с. 384—397 (1984).