ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXVI 1988 5

УДК 517.984

МАТЕМАТИКА

А. А. Вагаршакян

О сингулярном спектре возмущенного оператора умножения

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 6/I 1988)

Пусть A—оператор, действующий в пространстве $L_2(-1, 1)$ по формуле

$$Af(x)=xf(x)+\varphi(x)\int_{-1}^{1}f(t)\overline{\varphi(t)}dt. \tag{1}$$

Из результатов статьи Л. Д. Фаддеева ([1]) следует, что при условиях $\varphi(x)\in Lip_\alpha$, $\alpha>\frac{1}{2}$ и $\varphi(\pm 1)=0$ непрерывный сингулярный спектр у оператора A отсутствует, а дискретный состоит из конечного числа точек. Случай, когда $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$, рассмотрен в статье Б. С. Павлова и С. В. Петраса ([2]). Они показали, что в этом случае оператор A может иметь непрерывный сингулярный спектр и получены метрические оценки этой части спектра.

Здесь рассматривается случай, когда $\varphi(x)$ принадлежит пространству Бесова B_2^α, $0<\alpha<1$.

Для формулировки основной теоремы приведем некоторые определения.

Функция $f(x)$, определенная на отрезке $(-1, 1)$, принадлежит пространству $B_2^\alpha(-1, 1)$; это означает, что сходятся интегралы

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|^2dx+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+2\alpha}}dxdy<\infty,\ 0<\alpha<1.$$

Пусть E—множество, лежащее на действительной оси, и $0<\alpha<1$. Тогда α-емкостью множества E называется число

$$C_\alpha(E)=\left(\inf_{\mu\prec E}\int_E\int_E\frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^\alpha}\right)^{-1},$$

где $\mu\prec E$ означает, что μ—неотрицательная, единичная мера с носителем, лежащим в E.

Теорема. *Пусть* $\varphi(x)\in B_2^\alpha(-1, 1)$, $\frac{1}{4}<\alpha<1$, *причем в случае,* *когда* $\frac{1}{2}<\alpha<1$, *предполагается, что* $\varphi(\pm 1)=0$, *а в случае, когда* $\alpha=\frac{1}{2}$,

$$\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{\delta}\int\limits_{-1}^{-1+\delta}\varphi(t)\,dt=\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{\delta}\int\limits_{1-\delta}^{1}\varphi(t)\,dt=0.$$

Тогда непрерывный сингулярный спектр оператора (1) *имеет нулевую* $1-\alpha$*-емкость при* $\frac{1}{2}<\alpha<1$ *и нулевую* $\frac{3}{2}-2\alpha+\varepsilon$*-емкость при* $\frac{1}{4}<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$, *где* $\varepsilon>0$ *— любое число.*

Ниже приводится набросок доказательства этой теоремы.

Введем обозначения $H_\varphi=L_2(\operatorname{supp}\varphi)$, $H_\varphi^\perp=L_2(-1,1)\ominus L_2(\operatorname{supp}\varphi)$. Подпространства H_φ и $H_\varphi^\perp$ приводят оператор A, причем на подпространстве $H_\varphi^\perp$ оператор A совпадает с оператором умножения на независимую переменную.

Рассмотрим оператор $A|_{H_\varphi}$. Спектр этого оператора прост и $\varphi(x)$ является для него порождающим элементом. Для спектральной функции E_t оператора $A|_{H_\varphi}$ справедлива формула

$$\left(1-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d(E_t\varphi,\varphi)}{t-z}\right)\left(1+\int\limits_{-1}^{1}\frac{|\varphi(t)|^2}{t-z}\,dt\right)=1,\ \operatorname{Im}z\neq 0.$$

Введем обозначение $m(z)=1+\int\limits_{-1}^{1}\frac{|\varphi(t)|^2}{t-z}\,dt.$

Заметим, что $m(z)$ — регулярная в верхней полуплоскости функция и там имеет положительную мнимую часть.

Для любого отрезка $\Delta\subseteq(-\infty,\infty)$ имеем

$$(E(\Delta)\varphi,\varphi)=-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta}\operatorname{Im}\frac{1}{m(x+i\varepsilon)}\,dx.$$

С другой стороны, в силу теоремы Сохоцкого имеем

$$\lim_{z\to u+i0}m(z)=1+\int\limits_{-1}^{1}\frac{|\varphi(x)|^2}{x-u}\,dx+\pi i|\varphi(u)|^2,$$

если u — точка Лебега для функции $|\varphi(x)|^2$.

Следовательно, сингулярный спектр оператора A сосредоточен в множестве E, где функция $m(z)$ или не имеет граничного значения при приближении z к точке множества E, оставаясь в некотором угле Штольца, или существует некасательное граничное значение и оно равно нулю. Таким образом, исследование множества, где сосредоточен сингулярный спектр оператора A, приводится к изучению граничных свойств функции $m(z)$.

Институт математики Академии наук
Армянской ССР

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ

Գրգռված բազմապատկման օպերատորի սինգուլյար սպեկտրի մասին

Տվյալ հոդվածում բերվում է թեորեմ անկախ փոփոխականով բազմապատկման օպերատորի միաչափ գրգռման սպեկտրի անընդհատ սինգուլյար մասի վերաբերյալ։ Դիտարկվում է հետևյալ օպերատորը՝

$$Af(x) = xf(x) + \varphi(x)\int_{-1}^{1} f(t)\overline{\varphi(t)}\,dt$$

$L_2(-1, 1)$ տարածության մեջ։ Ենթադրվում է, որ $\varphi(x)\in B_2^{\alpha}(-1, 1)$, որտեղ $\frac{1}{4}<\alpha<1$։ Տվյալ հոդվածում ապացուցվում է, A օպերատորի սպեկտրի սինգուլյար մասը կենտրոնացված է մի բազմության վրա, որն ունի զրո ունակություն, կախված α պարամետրից։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. Д. Фаддеев*, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XXIII (1964). [2] *Б. С. Павлов, С. В. Петрас*, Функциональный анализ и его приложения, т. 4, вып. 2, с. 54—61 (1970).