ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXXXVI 1988 4

УДК 539.3

МЕХАНИКА

А. М. Саргсян, А. С. Хачикян

Поведение некоторых физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 2/II 1988)

Хорошо известно, что потенциалы многих плоских стационарных полей различной физической природы (поле упругих напряжений и деформаций, тепловое поле, поле концентрации стационарного процесса диффузии, электростатическое и магнитостатическое поля, электрическое поле постоянного тока и т. д.) удовлетворяют уравнениям Пуассона или Лапласа, для которых ставится та или иная краевая задача [1-3].

В работе [4] при изучении полей упругих напряжений в окрестности угловой точки поперечного сечения скручиваемого составного стержня впервые было обнаружено, что существует область изменения упругих и геометрических характеристик материалов составного стержня, при которых в малой окрестности входящего угла поперечного сечения упругие напряжения стремятся к нулю, что невозможно для однородного стержня. Полученные в работе [4] результаты существенно изменяют представление о влиянии края поверхности контакта на характер напряженного состояния и указывают на необходимость внесения коррективов в расчеты на прочность.

Исследованию характера распределения тепловых потоков в некоторой окрестности вершины плоского составного клина, когда на его границах заданы условия первого или второго родов или условия смешанного типа, посвящены работы [5-7]. В работах [5,6] для каждого неоднородного граничного условия на плоскости (θ_1, θ_2), где θ_1 и θ_2—углы растворов однородных клиньев, определены области изменения этих углов, при которых на крае поверхности контакта составного клина тепловые потоки независимо от отношения коэффициентов теплопроводности λ стремятся к нулю или бесконечности. Определены также предельные кривые, разделяющие области, в которых стремление тепловых потоков к нулю или бесконечности зависит от λ.

В данной работе эти результаты обобщены для неоднородных краевых задач, возникающих при рассмотрении других плоских стационарных полей. Определены потенциалы $U_k(r, \theta)$ $(k=1, 2)$ этих полей в кусочно-однородном клине (рис. 1) и с помощью соотношения $\overline{H}_k=\chi_k \cdot \mathrm{grad}\,U_k(r, \theta)$ (χ_k—постоянные, характеризующие физические свойства кусочно-однородной среды: модуль сдвига, коэффициенты теплопроводности и диффузии, диэлектрическая и магнитная прони-

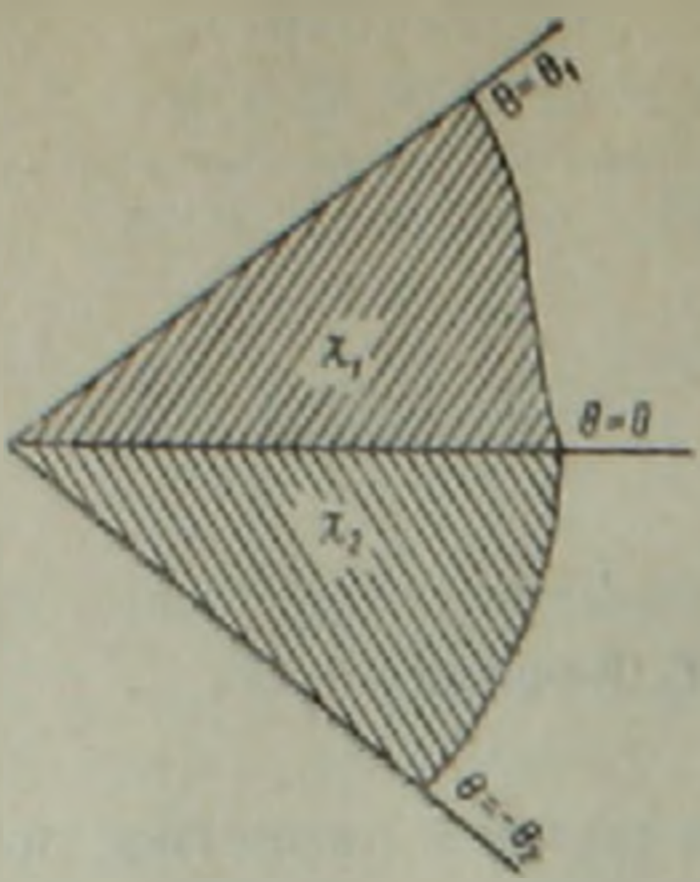

Рис. 1.

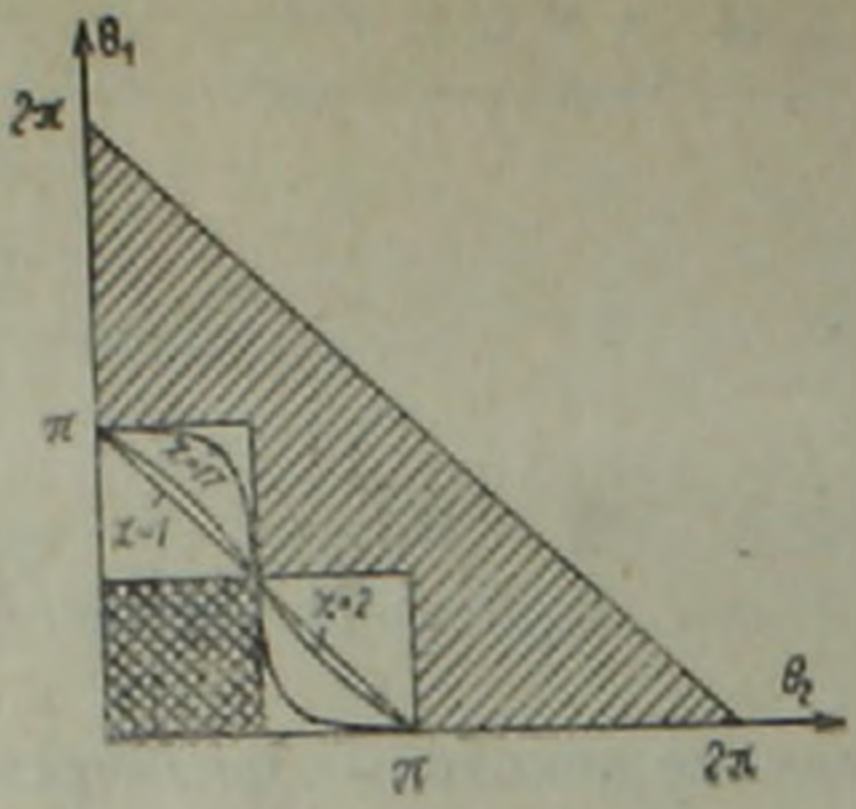

Рис. 2.

цаемости, коэффициенты электропроводности и т. д.) исследуется поведение характеристик $\chi_k \partial U_k / \partial r$ и $(\chi_k / r) \partial U_k / \partial \theta$ соответствующего поля в некоторой окрестности вершины составного клина (упругие напряжения или деформации при кручении или продольном сдвиге, потоки тепла или вещества, напряженность электрического и магнитного полей, плотность тока и т. д.).

При отсутствии источников потенциал стационарного поля удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_k}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_k}{\partial \theta^2} = 0, \tag{1}$$

$$k=1,\ 0<\theta<\theta_1;\ k=2,\ -\theta_2<\theta<0;\ 0<r<\infty,\ \theta_1+\theta_2\leqslant 2\pi,$$

условиям сопряжения на поверхности разрыва свойств материалов $(\theta=0)$

$$U_1(r, 0) = U_2(r, 0),\ \partial U_1(r, 0)/\partial\theta = \chi \partial U_2(r, 0)/\partial\theta \tag{2}$$

и граничным условиям, заданным в одном из видов:

$$U_1(r, \theta_1) = f_1(r),\quad U_2(r, -\theta_2) = f_2(r), \tag{3}$$

$$\frac{\chi_1}{r} \frac{\partial U_1(r, \theta_1)}{\partial \theta} = \varphi_1(r),\quad \frac{\chi_2}{r} \frac{\partial U_2(r, -\theta_2)}{\partial \theta} = -\varphi_2(r), \tag{4}$$

$$\frac{\chi_1}{r} \frac{\partial U_1(r, \theta_1)}{\partial \theta} = \varphi_1(r),\ U_2(r, -\theta_2) = f_2(r). \tag{5}$$

В условиях (2)—(5) $f_k(r)$ и $\varphi_k(r)$ — заданные функции, $\chi = \chi_2/\chi_1$.

Применяя к уравнению (1) интегральное преобразование Меллина ([8]), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. Удовлетворив преобразованным гранично-контактным условиям, вытекающим из (2) – (4) после применения преобразования Меллина, и возвратившись к оригиналу, для потенциала получим

$$U_k^{(m)}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{A_k^{(m)}(p)\cos p\theta + B_k^{(m)}(p)\sin p\theta}{\Delta^{(m)}(p)} r^{-p} dp, \tag{6}$$

где путь интегрирования (L) проходит правее мнимой оси комплексной плоскости p, но левее ближайшей особой точки подынтегральной функции ([6]), функции $A_k^{(m)}(p)$ и $B_k^{(m)}(p)$ определятся из гранично-контактных условий (2)—(5), а $\Delta^{(m)}(p)$ в случае граничных условий (3)—(5) имеет соответственно вид ($m=3, 4, 5$):

$$\Delta^{(3)}(p)=(\chi+1)\sin p(\theta_1+\theta_2)+(\chi-1)\sin p(\theta_1-\theta_2); \tag{7}$$

$$\Delta^{(4)}(p)=(\chi+1)\sin p(\theta_1+\theta_2)+(\chi-1)\sin p(\theta_1-\theta_2); \tag{8}$$

$$\Delta^{(5)}(p)=(\chi+1)\cos p(\theta_1+\theta_2)+(\chi-1)\cos p(\theta_1-\theta_2). \tag{9}$$

Для исследования характера распределения $\chi_k\partial U_k/\partial r$ и $(\chi_k/r)\partial U_k/\partial\theta$ в окрестности угловой точки составного клина (при $r\to 0$) дополним прямую (L) влево некоторым полукругом и применим теорему о вычетах. Принимая, что полюсами подынтегральной функции являются только корни уравнения

$$\Delta^{(m)}(p)=0 \tag{10}$$

и что все они действительны и просты ([4–6]), будем иметь

$$\chi_k\frac{\partial U_k^{(m)}}{\partial r}=-\chi_k\sum_{n=1}^{\infty}r^{p_n-1}\frac{A_k^{(m)}(-p_n)\cos p_n\theta+B_k^{(m)}(-p_n)\sin p_n\theta}{\Delta_1^{(m)}(p_n)}p_n; \tag{11}$$

$$\frac{\chi_k}{r}\frac{\partial U_k^{(m)}}{\partial\theta}=-\chi_k\sum_{n=1}^{\infty}r^{p_n-1}\frac{A_k^{(m)}(-p_n)\sin p_n\theta+B_k^{(m)}(-p_n)\cos p_n\theta}{\Delta_1^{(m)}(p_n)}p_n, \tag{12}$$

где $\Delta_1^{(m)}(p)=\partial\Delta^{(m)}(p)/\partial p$, $p_n>0$ ($n=1, 2, \ldots$)—корни уравнения (10).

Формулы (11) и (12) показывают, что характеристики поля при приближении к вершине составного клина (при $r\to 0$) стремятся к нулю, если все корни $p_n>1$, и к бесконечности, если среди корней есть хотя бы один $p_n<1$. Если $p_n=1$, то в угловой точке характеристики поля имеют конечные значения.

Исследование корней уравнения (10) при $m=3$, проведенное аналогично работам ([4–6]), показывает, что: а) характеристики поля в окрестности вершины кусочно-однородного клина стремятся к бесконечности независимо от отношения $\chi=\chi_2/\chi_1$, если углы θ_1 и θ_2 меняются в области, заштрихованной на рис. 2 простой штриховкой; б) характеристики поля около угловой точки стремятся к нулю независимо от χ, когда углы θ_1 и θ_2 лежат в области, заштрихованной на рис. 2 двойной штриховкой; в) стремление характеристик поля к бесконечности или нулю в окрестности угловой точки зависит от χ, если углы θ_1 и θ_2 меняются в незаштрихованной области на рис. 2.

Каждому значению χ соответствует предельная кривая, описываемая уравнением

$$(\chi+1)\sin(\theta_1+\theta_2)+(\chi-1)\sin(\theta_1-\theta_2)=0.$$

Эта кривая разделяет в плоскости (θ_1, θ_2) области, где характеристики поля стремятся к нулю или бесконечности. Если точка, имеющая координаты θ_1 и θ_2, и начало координат находятся по одну сторону от предельной кривой, характеристики поля в угловой точке стремятся к нулю, в противном случае—к бесконечности. Когда точка находится на предельной кривой (кривые $\chi=1$, $\chi=2$, $\chi=17$), то $\chi_k \partial U_k/\partial r$ и $(\chi_k/r)\partial U_k/\partial\theta$ в угловой точке будут конечными.

Для однородного клина ($\chi=1$) предельная кривая имеет вид $\theta_1+\theta_2=\pi$, а наименьший положительный корень $-p_1=\pi/(\theta_1+\theta_2)$. Следовательно, в окрестности выступающего угла однородного клина характеристики поля стремятся к нулю, а в окрестности входящего угла—к бесконечности. Эти результаты для полей упругих напряжений и электростатических полей были известны [2,3,7], а для температурных полей отмечены в работах [5,6].

В случае кусочно-однородного клина возможны такие значения параметров θ_1, θ_2 и χ из незаштрихованной области на рис. 2, при которых в некоторой окрестности входящих углов характеристики поля стремятся к нулю. При других значениях этих параметров в окрестности выступающего угла они стремятся к бесконечности, что невозможно для однородного клина.

Так как уравнение $\Delta^{(1)}(p)=0$ совпадает с уравнением $\Delta^{(3)}(p)=0$ при замене χ на $1/\chi$, то вышеприведенный анализ относится и к случаю граничных условий (4).

При граничных условиях (5) $\Delta^{(5)}(p)=(\chi+1)\cos p(\theta_1+\theta_2)+(\chi-1)\cos(\theta_1+\theta_2)=0$, и, как показывает анализ, в этом случае отсутствует область, где характеристики поля независимо от χ стремятся к нулю в окрестности угловой точки, а область стремления характеристик поля к бесконечности сильно увеличивается (рис. 3). Кроме того, предельная кривая симметрична относительно прямой $\theta_1=\theta_2$.

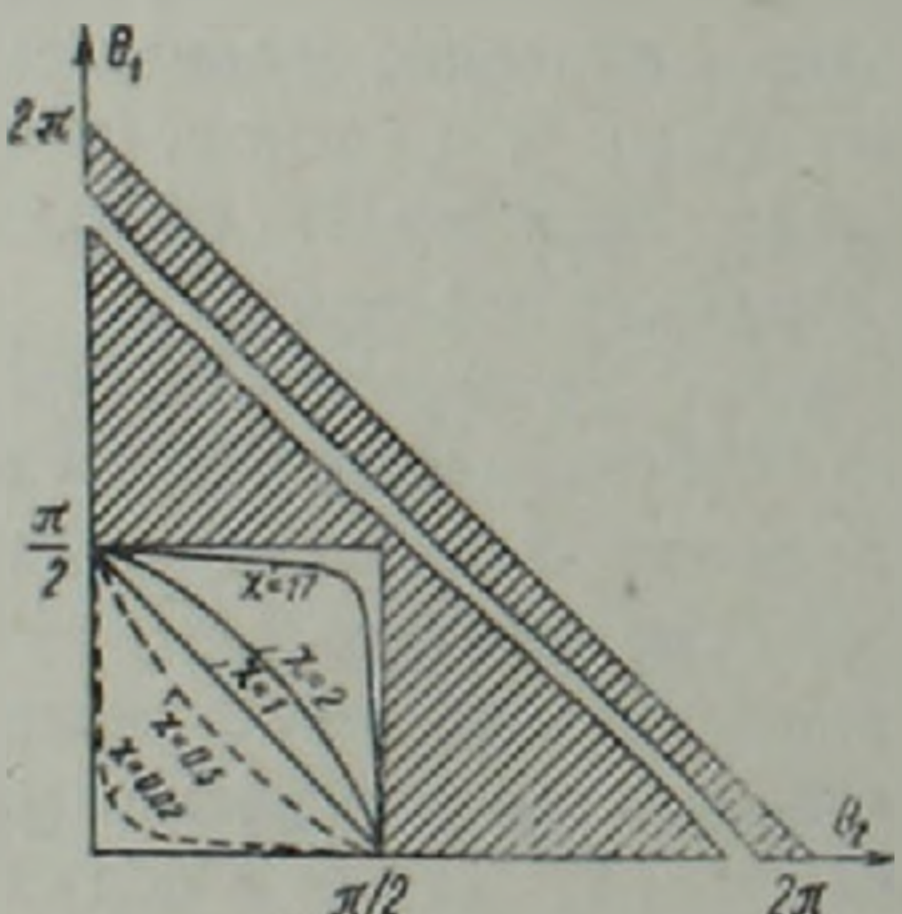

Рис. 3.

Описание физических процессов уравнением Пуассона является следствием известных упрощений и предположений, приводящих к геометрической и физической линеаризации математических задач. Полученные при решении этих задач бесконечные значения характеристик полей, которые невозможны в реальных условиях, означают во всяком случае нарушение первоначальных предположений об условиях протекания этих физических процессов. Например, бесконечные значения упругих напряжений в угловой точке поперечного сечения составного упругого тела означают в действительности появление в окрестности угловых точек пластических деформаций или трещин [4]. Далее, характер распределения тепловых потоков в окрестности угловых точек показывает, что невозможность точного обеспечения таких граничных условий, как совершенная теплоизоляция или бесконечный коэффициент теплоотдачи, приведет в окрестности угловых точек к более или менее существенному отличию действительных тепловых полей от теоретически полученных. Одновременно зависимость характеристик полей от геометрических и тепловых параметров соединяемых материалов делает возможным выбором этих параметров обеспечить требуемое распределение тепловых потоков в смысле их равномерности или концентрации.

Исследование электростатических, магнитостатических и других физических полей показывает существование аналогичного поведения характеристик этих полей и возможность практического управления этими полями для обеспечения требований техники и технологии.

Полученные результаты дают достаточно хорошее представление о характере протекания физических процессов в окрестности края поверхности контакта составного тела, что можно успешно использовать при решении многих практических задач. В то же время они указывают на необходимость исследования рассматриваемых процессов в более точной постановке.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Մ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Ա. Ս. ԽԱՉԻԿՅԱՆ

Մի քանի ֆիզիկական դաշտերի վարքը բաղադրյալ մարմնի միացման մակերևույթի եզրի շրջակայքում

Ուսումնասիրված է կտոր առ կտոր համասեռ սեպի անկյունային կետի շրջակայքում հարթ ստացիոնար դաշտերի բնութագրիչների վարքը (ոլորման և հակահարթ դեֆորմացիայի առաձգական լարումներ, ջերմային և դիֆուզիոն դաշտերում՝ ջերմության և նյութի հոսք, էլեկտրական և մագնիսական դաշտերի լարվածություն և այլն) տարբեր եզրային պայմանների դեպքում։

Ցույց է տրված, որ առաջին և երկրորդ եզրային խնդիրների համար գոյություն ունի համասեռ սեպերի բացվածքի անկյունների փոփոխման տիրույթ, որի դեպքում ստացիոնար դաշտերի բնութագրիչները անկախ բաղադրյալ սեպի ֆիզիկական հատկություններից ձգտում են զրոյի։ Խառը եզրային պայմանների դեպքում այդ տիրույթը բացակայում է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Тихонов, А. Н. Самарский*, Уравнения математической физики. Изд-во технико-теорет. лит., 1953. [2] *Г. А. Гринберг*, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948. [3] *К. Бинс, П. Лауренсон*, Анализ и расчет электрических и магнитных полей, Энергия, М., 1970. [4] *К. С. Чобанян*, Напряжения в составных упругих телах, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1987. [5] *А. М. Саргсян, А. С. Хачикян*, Изв. АН АрмССР. Серия техн. наук, № 2 (1988). [6] *Г. Г. Нерсисян, А. М. Саргсян*, Изв. АН АрмССР. Серия техн. наук, 1988, № 3. [7] *G. B. Sinclair*, Journal of Applied Mechanics, v. 47, № 1, p. 87—92 (1980). [8] *Я. С. Уфлянд*, Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1963.