ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVI 1988 4

УДК 539.3

МЕХАНИКА

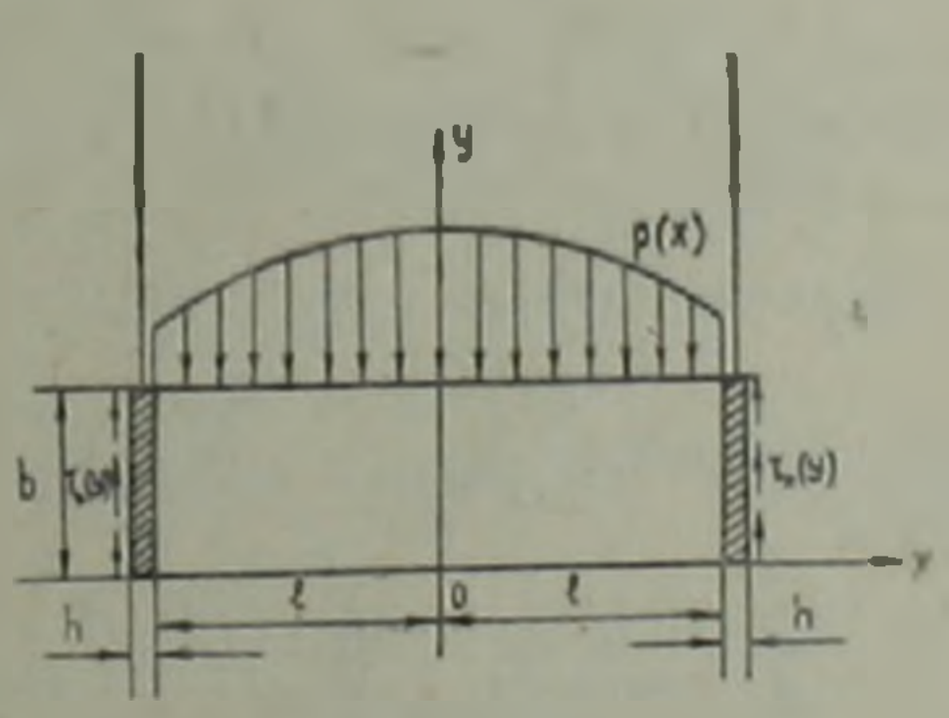
В. В. Акопян

О взаимодействии прямоугольного тела со стрингерами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 14/XII 1987)

Результаты работ по исследованию обширного класса задач контактного взаимодействия стрингеров с массивными деформируемыми телами подытожены в ([1, 2]). В этих задачах массивные тела обычно берутся в виде бесконечных областей, что существенно упрощает структуру определяющего уравнения. Однако в практически важных случаях массивные деформируемые тела имеют конечные размеры, которые значительно осложняют изучение таких задач. Задачи контактного взаимодействия стрингеров с прямоугольниками рассмотрены в ([3–5]).

В настоящей статье рассматривается плоская задача теории упругости для прямоугольника, усиленного двумя симметрично расположенными стрингерами длины b и малой толщины h. На концах стрингеров действуют вертикальные сосредоточенные силы, уравновешивающие силы тяжести, и распределенные нагрузки $p(x)$ и $\tau_0(y)$ (рисунок).



Как обычно ([6]), будем предполагать, что жесткость стрингера на изгиб пренебрежимо мала и его модуль упругости намного больше модуля упругости прямоугольника, что позволяет считать стрингер находящимся в одноосном напряженном состоянии. Поэтому на линии соединения стрингера с прямоугольником будут действовать только тангенциальные контактные напряжения.

Граничные условия для прямоугольника имеют вид:

$$\sigma_x^{(1)}(\pm l, y) = \tau_{xy}(x, 0) = \tau_{xy}(x, b) = 0, \tag{1}$$

$$\sigma_y^{(1)}(x, b) = -p(x), \tag{2}$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(\pm l, y) = \tau(y). \tag{3}$$

где $-l \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y \leqslant b$, а $\tau(y)$ — неизвестное контактное напряжение.

Далее представим бигармоническую функцию $\Phi(x, y)$ в виде ([7])

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos\alpha_k x \{A_k^{(1)} \operatorname{ch}\alpha_k y + B_k^{(1)} \operatorname{sh}\alpha_k y + \alpha_k y [C_k^{(1)} \operatorname{ch}\alpha_k y + D_k^{(1)} \operatorname{sh}\alpha_k y] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sin\beta_k y \{A_k^{(2)} \operatorname{ch}\beta_k x + D_k^{(2)} \beta_k x \operatorname{sh}\beta_k x\} \qquad (4)$$

$$\alpha_k = \frac{2k-1}{2l}\pi, \qquad \beta_k = \frac{k\pi}{b} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Здесь коэффициенты $A_k^{(1)}$, $B_k^{(1)}$, $C_k^{(1)}$, $D_k^{(1)}$, $A_k^{(2)}$, $D_k^{(2)}$ $(k=1, 2, \ldots)$ неизвестны и подлежат определению.

Представим функцию $p(x)$, $\tau(y)$, $\tau_0(y)$ и $P_0(x)$ в виде следующих рядов Фурье:

$$p(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \cos\alpha_k x, \ (0 < x < l);$$

$$\tau(y) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos\beta_k y \ (0 < y < b); \qquad (5)$$

$$\tau_0(y) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\beta_k y \ (0 < y < b);$$

$$P_0(x) = \rho_1 g b = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)} \cos\alpha_k x \ (0 < x < l);$$

где X_k — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, ρ_1 — плотность материала прямоугольника, g — ускорение свободного падения.

Учитывая, что $\sigma_x^{(1)}(x, y) = \partial^2\Phi/\partial y^2$, $\sigma_y^{(1)} = \partial^2\Phi/\partial x^2 + \rho_1 g y$, $\tau_{xy}(x, y) = -\partial^2\Phi/\partial x \partial y$ и удовлетворяя условиям (1), (2) и (5), после некоторых преобразований получим

$$A_k^{(1)} = 0, \ A_k^{(2)} = -\mu_k \operatorname{th}\mu_k D_k^{(2)};$$

$$B_k^{(1)} = \frac{a_k}{\alpha_k^2 \operatorname{sh}\nu_k} - \nu_k \operatorname{cth}\nu_k C_k^{(1)}, \ a_k = a_k^{(1)} + a_k^{(0)}; \qquad (6)$$

$$C_k^{(1)} = \frac{4(-1)^{k+1}}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^3 \operatorname{ch}\mu_n [\varphi_k^{(5)} + (-1)^n \varphi_k^{(1)}]}{(\alpha_k^2 + \beta_k^2)^2} D_k^{(2)} - \frac{\Psi_k^{(1)} a_k}{\alpha_k^2};$$

$$D_k^{(1)} = \frac{4}{l}(-1)^{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^3 \operatorname{ch}\mu_n [(-1)^n \varphi_k^{(3)} - \varphi_k^{(2)}]}{(\alpha_k^2 + \beta_k^2)^2} D_n^{(2)} - \frac{\varphi_k^{(4)} a_k}{\alpha_k^2}.$$

Здесь введены обозначения:

$$\Psi_n^{(1)} = \frac{\operatorname{sh}\nu_n - \nu_n \operatorname{ch}\nu_n}{\operatorname{sh}^2\nu_n - \nu_n^2}, \qquad \varphi_n^{(4)} = \frac{\nu_n \operatorname{sh}\nu_n}{\operatorname{sh}^2\nu_n - \nu_n^2},$$

$$\varphi_n^{(2)} = \frac{\operatorname{sh}\nu_n \operatorname{ch}\nu_n - \nu_n}{\operatorname{sh}^2\nu_n - \nu_n^2}, \qquad \varphi_n^{(3)} = \frac{\operatorname{sh}\nu_n - \nu_n \operatorname{ch}\nu_n}{\operatorname{sh}^2\nu_n - \nu_n^2},$$

$$\varphi_n^{(5)} = \frac{\operatorname{sh}^2\nu_n}{\operatorname{sh}^2\nu_n - \nu_n^2}, \qquad \varphi_n^{(1)} = (1 - \mu_n \operatorname{th}\mu_n)\operatorname{th}\mu_n + \mu_n. \qquad (7)$$

$$(\nu_n = \alpha_n b,\ \mu_n = \beta_n l,\ n = 1, 2, \ldots).$$

Из условия (3) с учетом (6) получим

$$\beta_p^2 \varphi_p^{(1)} \mathrm{ch}\mu_p D_p^{(2)} =$$

$$= \frac{16}{lb}\beta_p^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^3 \mathrm{ch}\mu_n}{(\alpha_k^2+\beta_n^2)^2} \left[(-1)^n \varphi_k^{(2)} - \varphi_k^{(3)} \right] \left[(-1)^n + (-1)^p \right] D_n^{(2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{k+1}\left[(-1)^{p+1}\varphi_k^{(5)} - \varphi_k^{(4)}\right] a_k}{4\alpha_k^2 l^{-1}} \right\} + \frac{2}{h}(-1)^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha_k a_k}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} - X_p. \qquad (8)$$

Далее, обозначив $Y_p = \beta_p^2 \mathrm{ch}\mu_p D_p^{(2)}$ $(p = 1, 2, \ldots)$, получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$Y_p = \sum_{n=1}^{\infty} A_{p.n} Y_n + N_p - X_p;$$

$$A_{p.n} = \frac{16\beta_p^2}{lb\varphi_n^{(1)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^3 \beta_n \left[(-1)^n + (-1)^p \right]}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2(\alpha_k^2+\beta_n^2)^2} \left[(-1)^n \varphi_k^{(2)} - \varphi_k^{(3)} \right]; \qquad (9)$$

$$N_p = \frac{4\beta_p^2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha_k a_k}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2} \left[(-1)^p \varphi_k^{(5)} + \varphi_k^{(4)} \right] + \frac{2}{h}(-1)^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha_k a_k}{\alpha_k^2 + \beta_p^2}.$$

В конечном итоге для деформации граничных точек $(x = \pm l)$ прямоугольника получим

$$\varepsilon_y^{(1)} = \left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_{x=\pm l} = \frac{2(1-\nu_1^2)}{E_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\varphi_k^{(1)}} \sin\beta_k y + \frac{(1-\nu_1^2)\rho_1 g y}{E_1}, \qquad (10)$$

где E_1—модуль Юнга материала прямоугольника, а ν_1—коэффициент Пуассона.

Из условия равновесия любой части $[0, y]$ стрингера будем иметь

$$\varepsilon_y^{(2)} = \frac{1-\nu_2^2}{hE_2} \int_0^y [\tau(s) - \tau_0(s)]\, ds, \qquad (11)$$

где ν_2 и E_2—упругие постоянные стрингера.

Теперь условие контакта $\varepsilon_y^{(1)} = \varepsilon_y^{(2)}$ $(0 < y < b)$ приводит к уравнению

$$\frac{1-\nu_2^2}{hE_2} \int_0^y [\tau(s) - \tau_0(s)]\, ds =$$

$$= \frac{2(1-\nu_1^2)}{E_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\varphi_k^{(1)}} \sin\beta_k y + \frac{1-\nu_1^2}{E_1}\rho_1 g y \quad (0 < y < b). \qquad (12)$$

Далее, подставив в (12) выражения $p(x)$, $\tau(y)$ и $\tau_0(y)$ из (5), после некоторых преобразований получим

$$\lambda \frac{X_k}{\beta_k} = \frac{Y_k}{\varphi_k^{(1)}} - l_k \quad (k = 1, 2, \ldots), \qquad (13)$$

где $\lambda = \dfrac{(1-\nu_2^2)E_1}{2hE_2(1-\nu_1^2)}$,

$$l_k=2\left[\lambda(b_0-X_0)+\frac{\rho_1 g}{2}\right]\frac{(-1)^k b}{k\pi}-\lambda\frac{b}{\beta_k}$$

Из условия равновесия сразу находим

$$X_0=\rho_1 g l+\frac{1}{b}\int_0^l p(s)ds. \tag{14}$$

Наконец, подставив выражение Y_k из (13) в (9), относительно коэффициента X_k получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$X_p\left(1-\frac{\lambda\varphi_p^{(1)}}{\beta_p}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_{p,n}\frac{\lambda\varphi_n^{(1)}}{\beta_n}X_n-\sum_{n=1}^{\infty}(A_{p,n}-\delta_p^{(n)})\varphi_n^{(1)}l_n+N_p. \tag{15}$$

Отметим, что после определения коэффициентов X_n по второй формуле (5) определяются неизвестные контактные напряжения $\tau(y)$.

В общем случае полученную систему можно представить в виде

$$X_p=\sum_{n=1}^{\infty}K_{pn}X_n+N_p^{(0)}. \tag{16}$$

Следуя изложенной в ([2,7]) методике, показывается, что

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|K_{m,n}|=0,$$

а свободные члены системы (16) ограничены сверху и для больших m имеют, по крайней мере, порядок m^{-1}. Отсюда вытекает, что бесконечная система (16) квазивполне регулярна.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Վ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Ուղղանկյուն մարմնի և վերադիրների փոխազդեցության մասին

Դիտարկված է առաձգականության տեսության հարթ խնդիր ուղղանկյան համար, որը ուժեղացված է երկու սիմետրիկ դասավորված վերադիրներով։

Կոնտակտային լարումների Ֆուրյեի գործակիցների համար ստացված են հանրահաշվական գծային անվերջ սիստեմներ և ցույց է տրված նրանց քվազի լիովին ռեգուլյարությունը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] Развитие теории контактных задач в СССР, Наука, М., 1976. [2] *В. М. Александров, С. М. Мхитарян*, Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками, Наука, М., 1983 [3] *P. S. Theocaris, K. Dafermos*, J. Appl. Mech., ser. E, v. 31, № 4 (1964) (рус. пер.: Прикл. механика, Труды амер. о-ва инж-мех., сер Е. т. 31, № 4, с. 159—162 (1964)). [4] *В. В. Микаелян*, ДАН АрмССР, т. 68, № 1, с. 21—27 (1974) [5] *В. В. Микаелян*. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 28, № 2, с. 3—14 (1975). [6] *E. Melan*, Ein Ing. Arch., Bd. 3, № 2, s. 193—129 (1932). [7] *Б. Л. Абрамян*. Прикл. математика и механика, т. 21 № 1, с. 98—100 (1957).