ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVI 1988 4

УДК 517.956.2

МАТЕМАТИКА

Г. С. Акопян, академик АН Армянской ССР | Р. А. Александрян |

О полноте системы собственных вектор-полиномов линейного пучка дифференциальных операторов в эллипсоидальных областях

(Представлено 8/II 1988)

Спектральные свойства пучка дифференциальных операторов

$$M(u)+\lambda L(u)=0,\ (x,y)\in\Omega\subset\mathbf{R}^2 \tag{1}$$

где $M=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $L=\Delta$—оператор Лапласа при нулевых краевых условиях

$$u|_\Gamma=0,\quad \Gamma=\partial\Omega, \tag{2}$$

впервые были рассмотрены в работах Р. А. Александряна [1,2] в связи с изучением качественного поведения решений системы С. Л. Соболева [3], описывающей малые колебания вращающейся идеальной жидкости. В них было показано, что эта задача эквивалентна изучению спектральных свойств некоторого ограниченного и самосопряженного оператора, действующего в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. При построении спектрального разложения упомянутого оператора фундаментальную роль сыграло исследование свойств введенных в [1] специальных диффеоморфизмов $S_i^{(\pm)}$ границы области, а также привлечение теории Пуанкаре—Данжуа, сохраняющей ориентацию гомеоморфизмов окружности.

Если в (1) M представляет собой простейший ультрагиперболический оператор, а L—оператор Лапласа, то основное уравнение (1) принимает вид

$$(1+\lambda)\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-(1-\lambda)\sum_{i=r+1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0 \tag{1'}$$

и при $|\lambda|<1$ представляет ультрагиперболическое уравнение, содержащее числовой параметр λ. В том случае, когда Ω есть n-мерная сфера с центром в начале и радиуса R, в работе [2] доказывается существование полной системы собственных функций задачи (1')—(2).

В настоящей работе мы рассматриваем аналогичные вопросы для операторов с постоянными коэффициентами, однако уже действующими в пространстве вектор-функций.

Пусть Ω—произвольный эллипсоид с уравнением $1-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j=$

$=0$. Рассматривается однородная краевая задача для нижеследующего линейного пучка дифференциальных уравнений

$$M(\vec{u})+\lambda L(\vec{u})=\vec{0}, \quad x\in\Omega\subset R^n, \tag{3}$$

$$\vec{u}|_\Gamma=0, \quad \vec{L}=\partial\Omega \tag{4}$$

где $M(\vec{u})=-\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}\dfrac{\partial^2\vec{u}}{\partial x_i\partial x_j}$, $\quad L(\vec{u})=-\sum\limits_{i,j=1}^{n} B_{ij}\dfrac{\partial^2\vec{u}}{\partial x_i\partial x_j}$,

$\vec{u}=(u_1, \ldots u_m)$ искомый m-мерный столбец. Предполагается, что $A_{ij}=$ $=A_{ji}$, $B_{ij}=B_{ji}(i, j=1, \ldots, n)$ и все они суть постоянные, симметричные матрицы порядка $m\times m$; предполагается также, что квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}\vec{\xi}^i, \vec{\xi}^j)\geqslant c\sum_{i=1}^{n}|\vec{\xi}^i|^2 \tag{5}$$

для любых векторов $\vec{\xi}^1, \ldots, \vec{\xi}^n\in R^m$, $c=\text{const}>0$.

Обозначим через $\vec{\mathcal{P}}$ линейное многообразие вектор-полиномов, т. е. вектор-функция $\vec{P}(x)=(P_1(x), \ldots, P_m(x))\in\vec{\mathcal{P}}$, если для любого k $(1\leqslant k\leqslant m)$ P_k—полином, а через $\vec{\mathcal{P}}_l$—совокупность всех вектор-полиномов степени не выше l, т. е. $\vec{P}(x)\in\vec{\mathcal{P}}_l$, если $P_{(x)}\in\vec{\mathcal{P}}$ и $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\deg P_k(x)\leqslant$ $\leqslant l$. Пусть, наконец, $\vec{C}_0(\bar{\Omega})$—банахово пространство непрерывных в $\bar{\Omega}$, исчезающих на границе Γ вектор-функций с нормой

$$\|\vec{f}\|=\sum_{k=1}^{m}\max_{x\in\bar{\Omega}}|f_k(x)|, \text{ где } \vec{f}=(f_1(x), \ldots, f_m(x)). \tag{6}$$

Лемма 1. *Пусть $\vec{f}\in\vec{C}_0(\bar{\Omega})$ произвольная вектор-функция, тогда существует последовательность вектор-полиномов $\{\vec{P}^r(x)\}_{r=1}^{\infty}$, $\vec{P}^r(x)\in\vec{C}_0(\Omega)$, которая при $r\to\infty$ по норме* (6) *сходится к $\vec{f}$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ задано. По теореме Вейерштрасса существует последовательность многочленов $q_k^l(x)$ $(k=1, 2, \ldots, m)$, которая при $l\to\infty$ равномерно сходится к $f_k(x)$ $(k=1, \ldots, m)$. Следовательно, существует такой номер $N_0(\varepsilon)$, что при $l>N_0$

$$\sum_{k=1}^{m}\max_{x\in\bar{\Omega}}|f_k(x)-q_k^l(x)|<\varepsilon. \tag{7}$$

Через Ω_δ, $\delta>0$, обозначим множество, состоящее из всех точек области Ω, расстояние от которых до границы Γ больше δ. Тогда ясно, что при достаточно малом δ для всех $k=1, 2, \ldots, m$ будем иметь

$$\max_{x\in\bar{\Omega}\setminus\Omega_\delta}|q_k^l(x)|\leqslant\max_{x\in\bar{\Omega}\setminus\Omega_\delta}|q_k^l(x)-f_k(x)|+\max_{x\in\bar{\Omega}\setminus\Omega_\delta}|f_k(x)|<\frac{2\varepsilon}{m}.$$

Следовательно, $$\sum_{k=1}^{m}\max_{x\in\bar{\Omega}\setminus\Omega_\delta}|q_k^l(x)|<2\varepsilon. \tag{8}$$

Составим вектор-полином $\vec{P}^r(x)$ с компонентами $P_k^r(x)$ по формулам

$$P_k^r(x)=\left(1-\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)^{2r}\right)q_k^l(x) \quad (k=1,2,\ldots,m),$$

который при всяком целом r, очевидно, принадлежит банахову пространству $\vec{C}_0(\bar\Omega)$. Принимая во внимание, что $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ в Ω_δ строго меньше единицы, а величины $\max\limits_{x\in\bar\Omega}|q_k^l(x)|$ $(l=1,2,\ldots)$, очевидно, ограничены не зависящей от l константой, найдем r_0, зависящее от ε и δ, такое, что при всех $r\geqslant r_0$

$$\max_{x\in\bar\Omega_\delta}\left|\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)^{2r} q_k^l(x)\right|<\frac{\varepsilon}{m}$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{m}\max_{x\in\bar\Omega_\delta}\left|\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_ix_j)^{2r}\right)q_k^l(x)\right|<\varepsilon. \tag{9}$$

Сопоставляя (7), (8), (9), получим

$$\|\vec{f}-\vec{P}^r\|=\sum_{k=1}^{m}\max_{x\in\bar\Omega}|f_k(x)-P_k^r(x)|=\sum_{k=1}^{m}\max_{x\in\bar\Omega}|f_k(x)-q_k^l(x)+$$

$$+\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)^{2r} q_k^l(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{m}\max_{x\in\bar\Omega}|f_k(x)-q_k^l(x)|+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\max_{x\in\bar\Omega}\left|\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)^{2r} q_k^l(x)\right|. \tag{10}$$

В силу (7) первое слагаемое справа, в (10), меньше ε, поэтому остается оценить второе слагаемое. Легко видеть, что

$$\sum_{k=1}^{m}\max_{x\in\bar\Omega}\left|\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)^{2r} q_k^l(x)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{m}\left[\max_{\bar\Omega\setminus\Omega_\delta}\left|\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)^{2r} q_k^l(x)\right|+\right.$$

$$\left.+\max_{\bar\Omega_\delta}\left|\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)^{2r} q_k^l(x)\right|\right]$$

и второе слагаемое в силу (9) меньше ε независимо от l. Выбирая $l>N_0(\varepsilon)$, будем иметь

$$\|\vec{f}-\vec{P}^r\|\leqslant\varepsilon+\sum_{k=1}^{m}\left|\max_{\bar\Omega\setminus\Omega_\delta}\left|\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)^{2r} q_k^l(x)\right|\right|+\varepsilon\leqslant\varepsilon+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\max_{\bar\Omega\setminus\Omega_\delta}|q_k^l(x)|+\varepsilon\leqslant 4\varepsilon.$$

Лемма 1 доказана.

Пусть $N=N(l,n,m)$ максимальное число линейно независимых вектор-полиномов, принадлежащих $\vec{\mathcal{P}}_l$. В линейном многообразии $\vec{\mathcal{P}}_l$ зафиксируем некоторый базис и каждому вектор-полиному $\vec{P}(x)\in\vec{\mathcal{P}}_l$ сопоставим N-мерный вектор $\vec{P}\in\mathrm{R}^N$, представляющий собой упорядоченную совокупность его коэффициентов. Таким образом, мы получим взаимно однозначное отображение $\pi: \vec{\mathcal{P}}_l \leftrightarrow \mathbf{R}^N$. Определим в $\mathbf{R}^N$ новое скалярное произведение следующим образом:

$$\{\vec{p}, \vec{q}\} = \int\limits_{\Omega}\left(\left(1 - \sum_{k,r=1}^{n} a_{kr}x_kx_r\right)\pi^{-1}\vec{p}, \pi^{-1}\vec{q}\right)dx, \tag{11}$$

и, чтобы подчеркнуть это различие, будем его обозначать через $\hat{\mathbf{R}}^N$.

Скалярное произведение (11) порождает в линейном многообразии скалярное произведение по формуле

$$\langle\vec{P}(x), \vec{Q}(x)\rangle = \{\pi\vec{P}(x), \pi\vec{Q}(x)\}, \tag{12}$$

Из (12) следует, что отображение π является изометрическим изоморфизмом между $\vec{\mathcal{P}}_l$ и $\hat{\mathbf{R}}^N$.

В пространстве $\hat{\mathbf{R}}^N$ рассмотрим операторы $\tilde{M}$ и $\tilde{L}$, которые определены по формулам

$$\tilde{M}(\vec{p}) = \pi\left(M\left(\left(1 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)\pi^{-1}\vec{p}\right)\right), \quad \tilde{L}(\vec{p}) = \pi\left(L\left(\left(1 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)\pi^{-1}\vec{p}\right)\right). \tag{13}$$

Так как операторы $M\circ\left(1 - \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)$, $L\circ\left(1 - \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)$ отображают $\vec{\mathcal{P}}_l$ в $\vec{\mathcal{P}}_l$, то формулы (13) действительно определяют отображения $\hat{\mathbf{R}}^N$ в $\hat{\mathbf{R}}^N$.

Лемма 2. *Операторы $\tilde{M}$ и $\tilde{L}$ симметричны в скалярном произведении* (11), *причем оператор $\tilde{L}$ положительно определенный.*

Доказательство. Пусть $\vec{p}, \vec{q}$ произвольные элементы из $\hat{\mathbf{R}}^N$, тогда

$$\{\tilde{M}\vec{p}, \vec{q}\} = \int\limits_{\Omega}\left(\left(1 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)\pi^{-1}\tilde{M}\vec{p}, \pi^{-1}\vec{q}\right)dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{k,r=1}^{n} A_{kr}\frac{\partial^2\left(\left(1 - \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)\pi^{-1}\vec{p}\right)}{\partial x_k\partial x_r}, \left(1 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)\pi^{-1}\vec{q}\right)dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\{\tilde{M}\vec{p}, \vec{q}\} = \int\limits_{\Omega}\sum_{k,r=1}^{n}\left(A_{kr}\frac{\partial\left(\left(1 - \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)\pi^{-1}\vec{p}\right)}{\partial x_k}, \frac{\partial\left(\left(1 - \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)\pi^{-1}\vec{q}\right)}{\partial x_r}\right)dx = -\int\limits_{\Omega}\sum_{k,r=1}^{n}\left(\left(1 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)\pi^{-1}\vec{p},\right.$$

$$A_{kr}\ \frac{\partial^2\left(\left(1-\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)\pi^{-1}\vec{q}\right)}{\partial x_k\partial x_r}\Bigg)dx=\{\vec{p},\ \tilde{M}\vec{q}\}.$$

Совершенно аналогично убеждаемся, что $\{\tilde{L}\vec{p},\ \vec{q}\}=\{\vec{p},\ \tilde{L}\vec{q}\}$. Кроме того,

$$\{\tilde{L}\vec{p},\ \vec{p}\}=\int\limits_{\Omega}\sum_{k,r=1}^{n}\Bigg(B_{kr}\ \frac{\partial\left(\left(1-\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)\pi^{-1}\vec{p}\right)}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial\left(\left(1-\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)\pi^{-1}\vec{p}\right)}{\partial x_r}\Bigg)dx;$$

применяя неравенство (5), получим, что $\{\tilde{L}\vec{p},\ \vec{p}\}>0$.

Определение. *Отличный от тождественного нуля вектор-полином* $P_0(x)$ *называется собственным вектор-полиномом, соответствующим собственному значению* λ_0, *если он является решением задачи* (3), (4) *при* $\lambda=\lambda_0$.

Имеет место следующая

Теорема. *Система собственных вектор-полиномов задачи* (3), (4) *полна в банаховом пространстве* $\vec{C}_0(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Пусть ненулевой вектор $\vec{p}_0\in\hat{R}^N$ является собственным вектором пучка

$$\tilde{M}(\vec{p})+\lambda\tilde{L}(\vec{p})=\vec{0}, \tag{14}$$

соответствующим собственному значению $\lambda=\lambda_0$. Так как оператор π является изоморфизмом между $\vec{\mathcal{P}}_l$ и $\hat{R}^N$, то

$$M\left[\left(1-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)\pi^{-1}\vec{p}_0\right]+\lambda_0 L\left[\left(1-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)\pi^{-1}\vec{p}_0\right]=\vec{0},$$

а это означает, что вектор-полином $\left(1-\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)\pi^{-1}\vec{p}_0$ является собственной функцией задачи (3), (4), соответствующей собственному значению λ_0.

Из леммы 2 следует, что линейный пучок (14) является регулярным пучком, поэтому существует система линейно независимых векторов $\vec{p}_k$ $(k=1, 2, \ldots, N)$, таких, что $\tilde{M}(\vec{p}_k)+\lambda_k\tilde{L}(\vec{p}_k)=\vec{0}$ $(k=1, 2, \ldots, N)$, где среди λ_k могут быть и кратные. Таким образом, доказано, что вектор-полиномы $\left(1-\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)\pi^{-1}\vec{p}_k$ являются собственными функциями задачи (3), (4). Теперь заметим, что всякий вектор-полином степени $(l+2)$, исчезающий на границе, представим в виде $\left(1-\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)\vec{P}_l(x)$, где $\deg\vec{P}_l(x)\leqslant l$, поэтому легко понять, что число линейно независимых вектор-полиномов степени не выше $(l+2)$ и исчезающих на границе равно $N=N(l, n, m)$. С другой стороны, число построенных нами линейно независимых собственных вектор-полиномов степени не выше $(l+2)$ в точности равно N. Из сказанного и из леммы 1 легко заключить, что построенная система собственных вектор-полиномов действительно полна в $\vec{C}_0(\bar{\Omega})$.

Ереванский государственный университет

Գ. Ս. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ

Էլիպսոիդալ տիրույթներում գծային դիֆերենցիալ օպերատորների փնջի սեփական վեկտոր-բազմանդամների համակարգի լրիվության վերաբերյալ

Վեկտոր-ֆունկցիաների տարածությունում դիտարկվում է դիֆերենցիալ օպերատորների փնջով ծնված Դիրիխլեի հետևյալ խնդիրը

$$\begin{cases} M(\vec{u})+\lambda L(\vec{u})=\vec{0}, & x\in\Omega\subset R^N \\ \vec{u}|_\Gamma=\vec{0} & \end{cases} \qquad (*)$$

որտեղ M, L *— 2-րդ կարգի, հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ օպերատորներ են, ընդ որում ենթադրվում է, որ* L*-ը էլիպտիկ օպերատոր է,* $\vec{u}=(u_1, \ldots, u_m)$ *— որոնելի վեկտոր-ֆունկցիան է,* $\Omega\subset R^N$ *էլիպսոիդալ տիրույթ է,* $\Gamma=\partial\Omega$:

Կառուցվում է π *իզոմետրիկ-իզոմորֆիզմը մինչև* l*-րդ կարգի* $\vec{\mathcal{P}}_l$ *վեկտոր-բազմանդամների և* $N=N(n, m, l)$ *չափանի վեկտորական* $\hat{R}^N$ *տարածության միջև և օգտագործելով* π *արտապատկերման հատկությունները ապացուցվում է, որ* (*) *խնդրի սեփական վեկտոր-բազմանդամների համակարգը լրիվ է* $\bar{\Omega}$*-ում անընդհատ և* $\partial\Omega$*-ում զրո դարձող վեկտոր-ֆունկցիաների* $\vec{C}_0(\bar{\Omega})$ *բանախյան տարածությունում։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. А. Александрян*, ДАН СССР, т. 43. № 5 (1950). [2] *Р. А. Александрян*. Тр. Моск. мат. о-ва, т. 9 (1960) [3] *С. Л. Соболев*, ПМФТ, № 3 (1960).