ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVI 1988 3

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

Н. А. Широков

О равномерном замыкании полиномов в строго псевдовыпуклых областях

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 15/I 1988)

Пусть Ω—компакт в пространстве $\mathbf{C}^n$, $n>1$, $A(\Omega)$—пространство функций, голоморфных во внутренности $\mathring{\Omega}$ и непрерывных в Ω, снабженное $C(\Omega)$-нормой, $P(\Omega)$—замыкание в норме $C(\Omega)$ множества всех голоморфных полиномов, $P(\Omega)\subset A(\Omega)$.

Принципиальным является вопрос о равенстве $P(\Omega)=A(\Omega)$ (*), важный и сам по себе и для различных приложений.

В случае $\Omega\subset\mathbf{C}$ эта задача была решена в работе С. Н. Мергеляна [1].

Известно, что при $n>1$ равенство (*) может не иметь места даже для псевдовыпуклых областей Ω с C^∞-границей [2]. Очень полезными являются достаточные условия (*), выраженные в обозримых терминах. В [3] было установлено его выполнение для строго псевдовыпуклых областей с C^2-гладкой границей, звездообразных относительно какой-то внутренней точки (множество Ω называется звездообразным относительно точки $A\in\Omega$, если из $z\in\Omega$ следует $A+t(z-A)\in\Omega$, $0\leqslant t\leqslant 1$).

В настоящей работе класс областей Ω с обсуждаемым свойством расширяется.

Введем необходимые обозначения. Если множество $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ задается условием $\Omega=\{z\in\mathbf{C}^n:\rho(z)\leqslant 0\}$, где $\rho(z)\in C(\mathbf{C}^n)$—вещественная функция, то положим $\Omega(\varepsilon)=\{z\in\mathbf{C}^n:-\varepsilon\leqslant\rho(z)\leqslant\varepsilon\}$. Для функции $\rho\in C^2(\mathbf{C}^n)$ полагаем

$$\nabla\rho(z)=\left(\frac{\partial\rho(z)}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial\rho(z)}{\partial z_n}\right),\quad H_\rho(z;h_1,\ldots,h_n)=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho(z)}{\partial z_j\partial\bar z_k}h_j\bar h_k,$$

$$m(\Omega(\varepsilon))=\min_{z\in\Omega(\varepsilon)}\ \min_{|h_1|^2+\ldots+|h_n|^2=1}H_\rho(z;h_1,\ldots,h_n).$$

Для строго псевдовыпуклых областей Ω с C^2-гладкой границей можно определить функцию ρ, для которой $\Omega=\{z:\rho(z)\leqslant 0\}$, таким образом, что эрмитовская форма $H_\rho(z;\cdot)$ будет положительно определенной при $z\in\partial\Omega$, а значит, и для $z\in\Omega(\varepsilon)$ при достаточно малом ε. Это показывает, что в нижеследующей теореме 1 о наследовании свойства (*) при гомотопиях с дополнительными ограничениями требования на функцию $\rho(z,\lambda)$ не являются неестественными.

Теорема 1. *Пусть Ω_0, Ω_1—ограниченные псевдовыпуклые об-*

ласти с C^2-гладкой границей, $\Omega_j=\{z\in\mathbf{C}^n: \rho_j(z)\leqslant 0\}$, $j=0, 1$, со следующими свойствами:

1. *Существуют числа $\varepsilon, \delta, \Delta>0$ и вещественная функция $\rho(z,\lambda)$, $z\in\mathbf{C}^n$, $\lambda\in[0, 1]$, такие, что*

a) *функция $\rho(z,\lambda)$ дважды гладкая по $z\in\mathbf{C}^n$ и непрерывно зависит вместе со всеми своими частными производными до второго порядка включительно от $\lambda\in[0, 1]$;*

b) $\rho(z, 0)=\rho_0(z)$, $\rho(z, 1)=\rho_1(z)$;

c) $|\nabla_z\rho(z,\lambda)|\geqslant\delta$ *для* $z\in\Omega_\lambda(\varepsilon)$, $\lambda\in[0, 1]$, *где* $\Omega_\lambda=\{z\in\mathbf{C}^n: \rho(z,\lambda)\leqslant 0\}$;

d) $m(\Omega_\lambda(\varepsilon))\geqslant\Delta$, $\lambda\in[0, 1]$.

2. *Справедливо соотношение $P(\Omega_0)=A(\Omega_0)$. Тогда*

$$P(\Omega_1)=A(\Omega_1).$$

Построение гомотопий с дополнительными свойствами a)—d) из теоремы 1 представляет отдельную задачу. Приведем более конкретные результаты, полученные применением теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $D\subset\mathbf{C}^n$—ограниченная строго псевдовыпуклая область с C^2-гладкой границей, звездообразная относительно какой-то точки, область Ω биголоморфно эквивалентна D, причем голоморфные отображения Φ и Φ^{-1}, связывающие D с Ω, C^2-гладки вплоть до границы. Тогда $P(\Omega)=A(\Omega)$.*

Условие о C^2-гладкости отображений заведомо выполняется, если D и Ω имеют C^∞-границу и биголоморфны внутренности $\mathring{D}$ и $\mathring{\Omega}$ ([4], гл. 8).

Для формулировки следующего результата введем еще ряд обозначений. Пусть Ω—ограниченная область в $\mathbf{C}^n$, $A^2(\mathring{\Omega})$—гильбертово пространство всех голоморфных в Ω функций, суммируемых с квадратом по мере Лебега в Ω, $\{\varphi_n\}$—полная ортонормированная система функций в $A^2(\Omega)$. Положим

$$K_\Omega(z,\zeta)=\sum_n\varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\zeta)},\quad z,\zeta\in\Omega.$$

Комплексным уравнением Монжа—Ампера относительно положительной функции v_Ω в строго псевдовыпуклой области $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ называется уравнение

$$\det\left(\frac{\partial^2}{\partial z_j\partial\bar z_k}\log v_\Omega\right)=c_n v_\Omega,$$

где постоянная c_n, зависящая только от n,—некая стандартная постоянная.

Известно ([4], гл. 11. 12), что для строго псевдовыпуклых областей Ω с C^∞-границей существуют и единственны функции $K_\Omega(z,\zeta)$ и $v_\Omega(z)$, причем $K_\Omega(z,z)$, $v_\Omega(z)\to+\infty$ при $z\to\partial\Omega$.

Теорема 3. *Пусть Ω—ограниченная строго псевдовыпуклая область с C^∞-границей. Обозначим через $V(z)$ какую-то из функций $K_\Omega(z,z)$ или $v_\Omega(z)$. Предположим, что для функции $V(z)$ выполнено следующее:*

минимальное значение функции $V(z)$ достигается в единственной точке $z_0\in\Omega$;

если $z \neq z_0$, *то* $\nabla V(z) \neq 0$.

Тогда $P(\Omega) = A(\Omega)$ *и это равенство справедливо для любой области* $\tilde{\Omega}$ *с* C^∞*-границей, биголоморфно эквивалентной* Ω.

В качестве примера приложения теоремы 3 приведем шар $\{|z| \leqslant 1\}$ $(V(z) = c_n(1-|z|^2)^{-n-1})$ и биголоморфно эквивалентные ему области.

Ленинградская академия
гражданской авиации

Ն. Ա. ՇԻՐՈԿՈՎ

Բազմանդամների հավասարաչափ փակումը խիստ պսեդոուռուցիկ տիրույթներում

Թող Ω*-ն լինի խիստ պսեդոուռուցիկ տիրույթ* C^n*-ում։ Թող* $A(\Omega)$*-ն լինի* Ω^0*-ում հոլոմորֆ և* $\overline{\Omega}$*-ում անընդհատ ֆունկցիաների դասը, իսկ* $P(\Omega)$*-ն նշանակի բոլոր հոլոմորֆ բազմանդամների փակումը հավասարաչափ նորմով։*

Հոդվածում բերվում են բավարար պայմաններ այն բանի համար, որ $A(\Omega)$ *և* $P(\Omega)$ *դասերը համընկնեն։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Н. Мергелян*, УМН, т. 7, № 2 (1952). [2] *K. Diederich, J. E. Fornaess*, Bull. Amer. Math. Soc., v. 82, p. 74—76 (1976). [3] *Н. А. Широков*, ДАН СССР, т. 287, №1, 66—69 (1986). [4] *М. Билз, Ч. Фефферман, Р. Гроссман*, Строго псевдовыпуклые области в C^n, „Математика", № 41, Мир, М., 1987.