

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

К. В. Гаспарян

# О мультипликативном разложении экспоненциальных семимартингалов

(Представлено академиком АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 23/XII 1987)

В работе получено мультипликативное разложение для экспоненты Долеан специальных семимартингалов и доказано, что при некоторых условиях положительная степень экспоненциального семимартингала является экспоненциальным семимартингалом, откуда следует результат о мультипликативном разложении положительной степени экспоненциальных локальных мартингалов. Относительно фильтрации  $F = (F_t)_{t \geq 0}$ , заданной на некотором полном вероятностном пространстве  $(\Omega, \bar{F}, P)$ , не требуется выполнения „обычных“ предположений полноты и непрерывности справа, а все рассматриваемые семимартингалы и локальные мартингалы считаются опциональными <sup>(1)</sup>.

Упомянутые выше мультипликативные разложения были получены ранее в <sup>(2)</sup> при „обычных“ предположениях на фильтрацию  $F$ .

Пусть  $X \in S$  — семимартингал с разложением  $X = X' + X^c$ , где  $X' = X^c + X^d$ ,  $X^c$  и  $X^d$  ( $X^c$ ) — непрерывная и чисто разрывная непрерывная справа (слева), имеющая пределы слева (справа) составляющие процесса  $X$  <sup>(1)</sup>. Рассмотрим стохастическое уравнение (уравнение Долеан)

$$Z = 1 + Z_- \cdot X' + Z \cdot X^c, \quad (1)$$

где  $Z_- = (Z_{t-})_{t \geq 0}$ . В классе  $S$  уравнение (1) имеет единственное (с точностью до неотличимости) решение  $Z = \varepsilon(X)$ , задающееся формулой <sup>(2)</sup>

$$\varepsilon(X)_t = \exp \left( X_t - \frac{1}{2} \langle X^c \rangle_t \right) \prod_{0 \leq s < t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s} \prod_{0 \leq s < t} (1 + \Delta^+ X_s) e^{-\Delta^+ X_s}, \quad (2)$$

где  $\langle X^c \rangle$  — квадратическая характеристика непрерывной мартингальной составляющей семимартингала  $X$ ,  $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$ ,  $\Delta^+ X_s = X_{s+} - X_s$ ,  $s \geq 0$  (бесконечные произведения в правой части (2)  $P$ -п. н. абсолютно сходятся для любого  $t > 0$ ).

Лемма 1. Если  $X, Y \in S$ , то

$$\varepsilon(X) \varepsilon(Y) = \varepsilon(X + Y + [X, Y]).$$

(Здесь  $[X, Y] = \langle X^c, Y^c \rangle + \sum_{t \in \mathbb{Q}} \Delta X_t \Delta Y_t + \sum_{s \in \mathbb{Q}} \Delta^+ X_s \Delta^+ Y_s$  — квадратическая вариация процессов  $X, Y \in S$ , и  $\langle X^c, Y^c \rangle$  — взаимная квадратическая характеристика непрерывных мартингальных составляющих семимартингалов  $X$  и  $Y$ ).

Доказательство леммы непосредственно следует из формулы Ито <sup>(1)</sup>

$$\varepsilon(X)\varepsilon(Y) = \varepsilon(X)_- \cdot \varepsilon(Y)' + \varepsilon(X) \cdot \varepsilon(Y)^{\varepsilon} + \varepsilon(Y)_- \cdot \varepsilon(X)' + \varepsilon(Y) \cdot \varepsilon(X)^{\varepsilon} + [\varepsilon(X), \varepsilon(Y)] \quad \text{Отсюда имеем } \varepsilon(X)\varepsilon(Y) = 1 + (\varepsilon(X)\varepsilon(Y))_- \cdot (X' + Y' + [X', Y']) + + (\varepsilon(X)\varepsilon(Y)) \cdot (X^{\varepsilon} + Y^{\varepsilon} + [X^{\varepsilon}, Y^{\varepsilon}]).$$

Теорема 1. Пусть  $X \in S_p$  — специальный семимартингал с разложением  $X = N + A$ , где  $N \in \mathcal{H}_{loc}$  — локальный мартингал,  $A \in \mathcal{P} \cap \mathcal{A}_{loc}$  — сильно предсказуемый процесс <sup>(1)</sup> локально интегрируемой вариации на  $R_+ = [0, \infty]$  и  $\Delta A \neq -1$ ,  $\Delta^* A \neq -1$ . Тогда существует процесс  $\bar{N} \in \mathcal{H}_{loc}$  такой, что

$$\varepsilon(X) = \varepsilon(\bar{N})\varepsilon(A),$$

где  $\bar{N} = (1 + \Delta A)^{-1} \cdot N' + (1 + \Delta^* A)^{-1} \cdot N^{\varepsilon}$  ( $N = N' + N^{\varepsilon}$ ).

Доказательство. Предсказуемый процесс  $(1 + \Delta A)^{-1}$  и опциональный процесс  $(1 + \Delta^* A)^{-1}$  — локально ограничены, так как сечения множеств  $\left\{ |1 + \Delta A| \leq \frac{1}{n} \right\}$  и  $\left\{ |1 + \Delta^* A| \leq \frac{1}{n} \right\}$  не имеют точек накопления в  $R_+$  для любого  $n \geq 1$ , т. е. определены стохастические интегралы  $(1 + \Delta A)^{-1} \cdot N'$  и  $(1 + \Delta^* A)^{-1} \cdot N^{\varepsilon}$  (см. <sup>(1)</sup>). Положим теперь  $\bar{N} = (1 + \Delta A)^{-1} \cdot N' + (1 + \Delta^* A)^{-1} \cdot N^{\varepsilon}$ ,  $\bar{N} \in \mathcal{H}_{loc}$ . Согласно <sup>(4)</sup> имеем  $[\bar{N}, A] \in \mathcal{H}_{loc}$ . С другой стороны очевидно, что  $N = \bar{N} + [\bar{N}, A]$ , так как  $N^{\varepsilon} = \bar{N}^{\varepsilon}$ ,  $\Delta N = \Delta(\bar{N} + [\bar{N}, A])$ ,  $\Delta^* N = \Delta^*(\bar{N} + [\bar{N}, A])$ . Отсюда из леммы 1 имеем, что  $\varepsilon(X) = \varepsilon(\bar{N} + [\bar{N}, A] + A) = \varepsilon(\bar{N})\varepsilon(A)$ .

Теорема 2. Пусть  $\lambda > 0$  и процесс  $Y \in S$  такой, что  $U^i(\lambda) = [(1 + x)^{\lambda} - 1 - \lambda x] \cdot \mu^i \in V$  — процесс ограниченной вариации,  $i = 1, 2$ , где  $\mu^1$  и  $\mu^2$  — целочисленные меры, порожденные скачками процесса  $Y$  вида  $\Delta Y$  и  $\Delta^* Y$ , соответственно. Тогда существует процесс  $X(\cdot) \in S$  такой, что

$$\varepsilon^{\lambda}(Y) = \varepsilon(X(\cdot)),$$

$$\text{где } X(\cdot) = \lambda Y + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \langle Y^{\varepsilon} \rangle + \sum_{i \leq 2} U^i(\lambda).$$

Доказательство. Согласно формуле (2) имеем  $\varepsilon^{\lambda}(Y)_t = \exp\left(\lambda Y_t - \frac{\lambda}{2} \langle Y^{\varepsilon} \rangle_t\right) \prod_{0 \leq s < t} (1 + \Delta Y_s)^{\lambda} e^{-\lambda \Delta Y_s} \prod_{0 \leq s < t} (1 + \Delta^* Y_s)^{\lambda} e^{-\lambda \Delta^* Y_s}$ . Положим теперь  $H_t = e^{\lambda Y_t}$ ,  $K_t = \prod_{0 \leq s < t} (1 + \Delta Y_s)^{\lambda} e^{-\lambda \Delta Y_s} \prod_{0 \leq s < t} (1 + \Delta^* Y_s)^{\lambda} e^{-\lambda \Delta^* Y_s}$ ,  $L_t = e^{-\frac{\lambda}{2} \langle Y^{\varepsilon} \rangle_t}$ .

Применяя далее формулу Ито <sup>(1)</sup>, получим  $H = 1 + \lambda H_- \cdot Y' + + \frac{\lambda^2}{2} H_- \cdot \langle Y^{\varepsilon} \rangle + \lambda H \cdot Y^{\varepsilon} + H_- (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x) \cdot \mu^1 + H(e^{\lambda x} - 1 - \lambda x) \cdot \mu^2$ . Учитывая, что  $L = 1 - \frac{\lambda}{2} L \cdot \langle Y^{\varepsilon} \rangle$ , получим, применяя вновь формулу

Ито, после несложных вычислений  $\varepsilon^{\lambda}(Y) = H/L/K = 1 + \varepsilon^{\lambda}(Y)_- \cdot \left[ \lambda Y' + + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \langle Y^{\varepsilon} \rangle + U^1(\lambda) \right] + \varepsilon^{\lambda}(Y) \cdot [\lambda Y^{\varepsilon} + U^2(\lambda)]$ , где  $Y = Y' + Y^{\varepsilon}$  — разло-

жение процесса  $Y \in S$ . Полагая теперь  $X(i) = X(i)' + X(i)''$ , где  $X(i)' = iY' + \frac{i(i-1)}{2} \langle Y^c \rangle + U^1(i)$ ,  $X(i)'' = iY'' + U^2(i)$ , получим доказательство теоремы 2.

Следствие 1. Пусть  $i > 0$  и задан процесс  $Y \in S_p$  с разложением  $Y = M + B$ , где  $M \in \mathcal{M}_{loc}$ ,  $B \in \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{A}_{loc}$ . Тогда если процесс  $U^i(i) \in \mathcal{A}_{loc}$ ,  $i = 1, 2$ , то существует процесс  $X(i) \in S_p$  с разложением  $X(i) = N(i) + A(i)$ , где  $N(i) = iM + \sum_{i=1}^{\infty} (U^i(i) - \bar{U}^i(i)) \in \mathcal{M}_{loc}$ ,  $A(i) = iB + \frac{i(i-1)}{2} \langle Y^c \rangle + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{U}^i(i) \in \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{A}_{loc}$  так, что

$$\varepsilon^i(Y) = \varepsilon(X(i)).$$

(Здесь  $\bar{U}^i(i)$  — компенсатор процесса  $U^i(i)$ ,  $i = 1, 2$ ).

Доказательство следствия 1 непосредственно вытекает из теоремы 2, если положить там  $Y' = M' + B'$  и  $Y'' = M'' + B''$ , где  $M' = M' + M''$  и  $B = B' + B''$  — разложения процессов  $M$  и  $B$ .

Следствие 2 (ср. (2)). Пусть  $i > 0$ , процесс  $Y = M \in \mathcal{M}_{loc}$  с  $\Delta M \geq -1$ ,  $\Delta^+ M \geq -1$  и  $T = \inf(t : \Delta M_t = -1 \text{ или } \Delta^+ M_t = -1)$ . Тогда если  $V^i(i) = U^i(i)^T \in \mathcal{A}_{loc}$ ,  $i = 1, 2$ , то существует процесс  $\bar{X}(i) \in S_p$  с разложением  $\bar{X}(i) = \bar{N}(i) + \bar{A}(i)$ , где  $\Delta \bar{A}(i) \geq -1$ ,  $\Delta^+ \bar{A}(i) \geq -1$  и  $\bar{N}(i) = iM + \sum_{i=1}^{\infty} (V^i(i) - \bar{V}^i(i)) \in \mathcal{M}_{loc}$ ,  $\bar{A}(i) = \frac{i(i-1)}{2} \langle M^c \rangle^T + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{V}^i(i) \in \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{A}_{loc}$  так, что

$$\varepsilon^i(M) = \varepsilon(\bar{N}(i)) + (\bar{A}(i))^i,$$

$\bar{N}(i) = (1 + \Delta \bar{A}(i))^{-1} \cdot \bar{N}(i)' + (1 + \Delta^+ \bar{A}(i))^{-1} \cdot \bar{N}(i)'' \in \mathcal{M}_{loc}$ . (Здесь  $U^i(i)' = U^i(i)_{i \wedge T}$  — остановленный в момент  $T$  процесс  $U^i(i)$ ,  $i = 1, 2$ ).

Доказательство. Согласно следствию 1 имеем  $\varepsilon^i(M) = \varepsilon(X(i))$ . Легко видеть, что  $\varepsilon(X(i)) = \varepsilon(\bar{X}(i))$ , так как  $X(i) = \bar{X}(i)$  на  $[0, T]$  и  $\varepsilon(X(i)) = \varepsilon(\bar{X}(i)) = 0$  на  $[T, \infty]$  ( $\Delta^+ X_T(i) = \Delta^+ \bar{X}_T(i) = 0$ ). Покажем теперь, что  $\Delta \bar{A}(i) \geq -1$  и  $\Delta^+ \bar{A}(i) \geq -1$ . Положим  $S_1 = \inf(t : \Delta \bar{A}_t(i) \leq -1)$ ,  $S_2 = \inf(t : \Delta^+ \bar{A}_t(i) \leq -1)$ . Из очевидных равенств

$$\Delta \bar{A}_{S_1}(i) = E[\Delta \bar{X}_{S_1}(i) | \mathcal{F}_{S_1-}] = E[(1 + \Delta M_{S_1})^i - 1 | \mathcal{F}_{S_1-}],$$

$$\Delta^+ \bar{A}_{S_2}(i) = E[\Delta^+ \bar{X}_{S_2}(i) | \mathcal{F}_{S_2}] = E[(1 + \Delta^+ M_{S_2})^i - 1 | \mathcal{F}_{S_2}]$$

следует, что

$$E(1 + \Delta M_{S_1})^i / S_1 < \infty = E(1 + \Delta \bar{A}_{S_1}(i)) / S_1 < \infty \leq 0,$$

$$E(1 + \Delta^+ M_{S_2})^i / S_2 < \infty = E(1 + \Delta^+ \bar{A}_{S_2}(i)) / S_2 < \infty \leq 0,$$

т. е.  $\Delta M_{S_1} = -1$  на  $(S_1 < \infty)$ ,  $\Delta^+ M_{S_2} = -1$  на  $(S_2 < \infty)$  и, значит,  $S_1 \geq T$  и  $S_2 \geq T$ . Далее имеем

$$0 = E[\Delta M_{S_1} / S_1 < \infty + \Delta^+ M_{S_2} / S_2 < \infty] = E[\Delta M_{S_1} / T = S_1 < \infty + \Delta^+ M_{S_2} / T = S_2 < \infty] = -P(T = S_1 < \infty) - P(T = S_2 < \infty),$$

так как  $(T < S_1 < \infty) \in \mathcal{F}_{S_1-}$  и  $(T < S_2 < \infty) \in \mathcal{F}_{S_2}$ . Таким образом  $S_1 > T$  и  $S_2 > T$ . Но так как  $\Delta \bar{A}(i) = \Delta^+ \bar{A}(i) = 0$  на  $[T, \infty]$ , то отсюда получим,

что  $\Delta \bar{A}(t) > -1$  и  $\Delta' \bar{A}(t) > -1$ . Для завершения доказательства следствия 2 применим теорему 1.

Следствие 3 (ср. (2)). Пусть  $0 < \lambda < 1$  и процесс  $Y = M \in \mathcal{F}_{loc}$  с  $\Delta M > -1$ ,  $\Delta' M > -1$ . Тогда существует процесс  $X(\lambda) \in \mathcal{S}_p$  с разложением  $X(t) = \bar{N}(t) + \bar{A}(t)$  так, что

$$\varepsilon^\lambda(M) = \varepsilon(\bar{N}(t)) \varepsilon(\bar{A}(t)),$$

где процессы  $\bar{N}(t)$ ,  $\bar{A}(t)$  и  $\bar{N}(t)$  такие же, как в следствии 2, а  $\varepsilon(\bar{A}(t)) > 0$  — убывающий процесс с  $\varepsilon(\bar{A}(t))_0 = 1$ .

Доказательство. Так как процессы  $V(t) \in \mathcal{F}_{loc}$ ,  $i = 1, 2$  (см. (2)), то согласно следствию 2 имеем  $\varepsilon^\lambda(M) = \varepsilon(\bar{N}(t)) \varepsilon(\bar{A}(t))$ , где  $\Delta \bar{A}(t) > -1$  и  $\Delta' \bar{A}(t) > -1$ , т. е. процесс  $\varepsilon(\bar{A}(t)) > 0$ . Однако, так как  $\varepsilon(\bar{A}(t)) = \varepsilon(\bar{A}(t))_-(1 + \Delta \bar{A}(t))$ , то и процесс  $\varepsilon(\bar{A}(t))_- > 0$  и, ввиду того, что  $\varepsilon(\bar{A}(t)) = 1 + \varepsilon(\bar{A}(t))_- \cdot \bar{A}(t)' + \varepsilon(\bar{A}(t)) \cdot \bar{A}(t)^\varepsilon$ , где процессы  $\bar{A}(t)' = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} < M > + \bar{V}^1(t)$  и  $\bar{A}(t)^\varepsilon = \bar{V}^2(t)$  — убывающие, получаем, что и процесс  $\varepsilon(\bar{A}(t))$  — убывающий и  $\varepsilon(\bar{A}(t))_0 = 1$ .

Замечание. Мультипликативное разложение, полученное в следствии 3, существенно используется для получения достаточных, близких к неулучшаемым условий равномерной интегрируемости экспоненциальных мартингалов (3).

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

#### Կ. Վ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

#### Էֆսպոնենցիալ սեմիմարտինգալների մուլտիպլիկատիվ վերլուծության մասին

Հոդվածում օտացված է մուլտիպլիկատիվ վերլուծություն հասուն սեմիմարտինգալների Դուբանի էքսպոնենցիալ համար և ապացուցված է, որ որոշ պայմանների դեպքում, էքսպոնենցիալ սեմիմարտինգալների դրական աստիճանը նույնպես էքսպոնենցիալ սեմիմարտինգալ է, որտեղից հետևում է մուլտիպլիկատիվ վերլուծությունը էքսպոնենցիալ լոկալ մարտինգալների դրական աստիճանի համար:

Զրիվ հավանականական տարածության վրա արված ֆիլտրացիայից չի պահանջվում, որպեսզի նա բավարարի «սուփորական» պայմանների, իսկ բոլոր դիտարկվող սեմիմարտինգալները և լոկալ մարտինգալները ենթադրվում են օպցիոնալ:

#### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<sup>1</sup> Л. И. Гальчук, Мат. сб., т. 112 (154), № 4 (8) (1980). <sup>2</sup> D. Lepingle, J. Mémin, Z. Wahrsch. verw. Geb., Bd. 42 (1978). <sup>3</sup> Л. И. Гальчук, Теория вероятностей и ее приложения, т. 29, № 1 (1984). <sup>4</sup> К. В. Гаспарян, в кн.: Труды ВЦ АН АрмССР и ЕГУ, т. 15 (1988). <sup>5</sup> К. В. Гаспарян, XXI школа-коллоквиум по теории вероятностей и мат. статистике, Тезисы докладов, Тбилиси, 1987.