ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXVI 1988 2

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

В. И. Гаврилов, В. С. Захарян

Признаки нормальности семейств голоморфных отображений

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 19/XII 1987)

Классическая теорема Монтеля утверждает, что множество $\mathcal{F}$ мероморфных функций образует в плоской области G нормальное семейство, если можно указать такие три различные значения ω_1, ω_2, ω_3 на сфере Римана Ω, что уравнения $f(z)=\omega_i$, $i=1, 2, 3$, не имеют решений в G для любой функции $f\in\mathcal{F}$. Известные доказательства этой теоремы существенно опираются на результаты теории функций комплексного переменного. В настоящей статье мы показываем, что в действительности теорема Монтеля имеет топологический характер и ее суть сводится к тому, что комплексное многообразие $\Omega\setminus\Gamma$, получаемое удалением из сферы Римана Ω замкнутого множества $\Gamma=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, является гиперболическим многообразием. Это обстоятельство позволяет распространить утверждение теоремы Монтеля на голоморфные отображения в гиперболические многообразия.

1. Пусть M и N — произвольные многообразия, снабженные функциями расстояния δ_M и δ_N (в дальнейшем мы будем предполагать M гиперболическим многообразием, и поэтому в качестве δ_M будем выбирать функцию расстояния Кобаяси d_M (см. [1])). Обозначим через $E(M, N)$ и $\mathcal{H}(M, N)$ соответственно пространства непрерывных и голоморфных отображений из M в N с топологией равномерной сходимости на компактах из M.

Напомним, что множество $\mathcal{F}\subset E(M, N)$ называется равностепенно непрерывным в точке $p\in M$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такая окрестность U точки p, в которой $\delta_N(f(p), f(q))<\varepsilon$ для всех $q\in U$ и всех $f\in\mathcal{F}$. Множество $\mathcal{F}\subset E(M, N)$ является равномерно равностепенно непрерывным семейством, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что при всех $p, q\in M$, у которых $\delta_M(p, q)<\delta$, выполняется $\delta_N(f(p), f(q))<\varepsilon$ для каждого $f\in\mathcal{F}$.

Непосредственно видно, что множество $\mathcal{F}\subset E(M, N)$ не образует равномерно равностепенно непрерывного семейства в том и только в том случае, когда можно указать такие две последовательности точек (p_ν) и (q_ν) на M и такую последовательность функций (f_ν) из $\mathcal{F}$, что $\delta_M(p_\nu, q_\nu)\to 0$, но $\delta_N(f_\nu(p_\nu), f_\nu(q_\nu))\not\to 0$ при $\nu\to\infty$.

Последовательность точек (p_ν) назовем P-последовательностью семейства отображений $\mathcal{F}$.

Это свойство семейства отображений переносится на индивидуальное отображение в терминах P-последовательностей, которые впервые возникли для мероморфных функций (см. [2]) и распростра-

ны на голоморфные отображения в эрмитовы многообразия в (3). Мы вернемся к этому понятию в пункте 4.

2. Напомним, что множество голоморфных отображений $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(M, N)$ образует нормальное семейство в смысле B_v (4), если любая последовательность отображений из $\mathcal{F}$ содержит такую подпоследовательность (f_ν), которая либо равномерно сходится на компактах из M к некоторому голоморфному отображению f, либо (f_ν) компактно расходится в M. Последнее означает, что для любого компакта $K \subset M$ и любого $K' \subset N$ существует такой натуральный номер ν_0, что $f_\nu(K) \cap K' = \varnothing$ для всех $\nu \geqslant \nu_0$. Известно, (см. (4), с. 197), что если N — полное эрмитово многообразие и множество $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(M, N)$ образует на M равностепенно непрерывное семейство, то $\mathcal{F}$ будет нормальным семейством. Этот результат мы используем для доказательства следующей общей версии теоремы Монтеля.

Теорема 1. *Пусть M — произвольное гиперболическое многообразие и N — компактное многообразие. Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ — такие замкнутые подмножества в N, что для каждого i, $i = 1, \ldots, s$ множество $N \setminus \Gamma_i$ является полным гиперболическим многообразием и $\bigcap_{i=1}^{s} \Gamma_i$ состоит из конечного числа точек. Если множество $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(M, N)$ обладает свойством, что ни одно из отображений $f \in \mathcal{F}$ не принимает значений из $\bigcup_{i=1}^{s} \Gamma_i$, то $\mathcal{F}$ — нормальное семейство.*

3. Доказательство теоремы 1. Заметим сначала, что множество $\mathcal{F}^*$, состоящее из отображений $f \in \mathcal{F}$, как отображений $f \in \mathcal{H}(M, N \setminus \Gamma_i)$, $i = 1, \ldots, s$, образует на M равностепенно непрерывное семейство при каждом i, $i = 1, 2, \ldots, s$, поскольку голоморфные отображения обладают свойством невозрастания расстояния относительно функций расстояния Кобаяси d_M и $d_{N \setminus \Gamma_i}$. Поэтому с учетом полноты гиперболических многообразий $N \setminus \Gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, и отмеченного выше результата B_v заключаем, что семейство $\mathcal{F}$ нормально в $\mathcal{H}(M, N \setminus \Gamma_i)$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Осталось показать, что если $(f_\nu) \subset \mathcal{F}$ является компактно расходящейся последовательностью отображений $f_\nu : M \to N \setminus \Gamma_i$ для каждого i, $i = 1, 2, \ldots, s$, то (f_ν) содержит подпоследовательность, которая равномерно сходится на компактах к некоторому отображению $f \in \mathcal{H}(M, N)$.

Рассмотрим такую последовательность (K_n) связных компактных подмножеств в N, для которой $M = \bigcup_n K_n$ и $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\bigcap_{i=1}^{s} \Gamma_i = \{y_1, \ldots, y_m\}$ и $V_1, \ldots, V_m$ — взаимно не пересекающиеся окрестности точек $y_1, \ldots, y_m$ в N. Рассмотрим такие открытые покрытия U_i замкнутых множеств Γ_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, что $\bigcup_{j=1}^{m} V_j = \bigcap_{i=1}^{s} U_i$. Так как $N \setminus U_i$ являются компактными подмножествами в $N \setminus \Gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, то существует такое натуральное число $\nu(K_1, i)$, что $f_\nu(K_1) \cap (N \setminus U_i) = \varnothing$ для всех $\nu \geqslant \nu(K_1, i)$. Следовательно, $f_\nu(K_1) \subset \bigcap_{i=1}^{s} U_i = \bigcup_{j=1}^{m} V_j$ для

всех ν, $\nu \geqslant \bar{\nu}_1 = \bar{\nu}(K_1) = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \bar{\nu}(K_1, i)$. Так как K_1 — связное множество, от существует такая подпоследовательность последовательности (f_ν), которую мы опять обозначим через (f_ν), и такой номер $\bar{j}$, что $f_\nu(K_1) \subset V_{\bar{j}}$, $\nu \geqslant \bar{\nu}_1$.

Применяя к подпоследовательности (f_ν) и множеству K_2 аналогичные рассуждения, мы найдем такое натуральное число $\bar{\nu}_2$, что $f_\nu(K_2) \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j$ для всех $\nu \geqslant \nu_2$. Так как K_2 — связное множество и $f_\nu(K_1) \subset V_{\bar{j}}$, то $f_\nu(K_2) \subset V_{\bar{j}}$ — для всех $\nu \geqslant \bar{\nu}_2$. Итак, для каждого $n \in \mathbf{N}$ существует такой натуральный номер $\bar{\nu}_n$, что $f_\nu(K_n) \subset V_j$ при всех $\nu \geqslant \bar{\nu}_n$.

Выберем теперь окрестность V_j^* точки $y_{\bar{j}}$, $V_j^* \subset V_{\bar{j}}$, и выберем открытое множество U_j^* так, чтобы $W = \bigcap_{i=1, i \neq \bar{j}}^{s} U_i \cap U_j^* = \bigcup_{j=1, j \neq \bar{j}}^{m} V_j \subset V_j^*$.

Для достаточно больших поляров ν имеем $f_\nu(K_1) \subset W$ и $f_\nu(K_1) \subset V_{\bar{j}}$. Значит, $f_\nu(K_1) \subset V_j^*$. Продолжая рассуждения, получим, что для каждого $n \in \mathbf{N}$ справедливо $f_\nu(K_n) \subset V_j^*$ при всех достаточно больших номерах ν. Это значит, что последовательность (f_ν) содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся на компактах из M к постоянному отображению $f \equiv y_{\bar{j}}$, что заканчивает доказательство теоремы 1.

4. Пусть M — гиперболическое многообразие с функцией расстояния Кобаяси d_M и N — эрмитово многообразие. Последовательность точек $(p_\nu) \subset M$ называется P-последовательностью для отображения $f \in \mathcal{H}(M, N)$, если существует такая другая последовательность $(q_\nu) \subset M$, что $d_M(p_\nu, q_\nu) \to 0$, но $\delta_N(f(p_\nu), f(q_\nu)) \not\to 0$ при $\nu \to \infty$ (см. [3]). Это определение в случае мероморфных функций равносильно определению понятия P-последовательности, впервые введенного и изученного в статьях [2] и [5].

Аппарат P-последовательностей оказался удобным для изучения распределения значений мероморфных функций и голоморфных отображений.

Определение 1. *Пусть N — компактное комплексное многообразие и Γ — замкнутое подмножество в N, для которого $N \setminus \Gamma$ является гиперболическим многообразием. Множество Γ обладает K-свойством, если для любой точки $y \in \Gamma$ и любой окрестности U точки y в N существует такая окрестность V точки y, замыкание $\overline{V}$ которой содержится в U, что расстояния между $N \setminus U$ и $(N \setminus \Gamma) \cap V$ относительно функции расстояния Кобаяси $d_{N \setminus \Gamma}$ положительное.*

Понятие K-свойства появляется в более общей ситуации при обсуждении проблемы продолжимости голоморфных отображений (см. [1], с. 91).

Следующий результат связывает понятия P-последовательности и K-свойства.

Теорема 2. *Множество* Γ *обладает* K*-свойством в том и только в том случае, когда отображение вложения* $\lambda: N\setminus\Gamma\to N$ *не имеет* P*-последовательностей.*

Доказательство. Пусть отображение вложения $\lambda: N\setminus\Gamma\to N$ обладает P-последовательностью (p_ν) и пусть (q_ν) — последовательность точек из определения P-последовательности. Так как N — компактное многообразие, то можно считать, что $p_\nu\to p$, $q_\nu\to q$, $d_{N\setminus\Gamma}(p_\nu, q_\nu)\to 0$ при $\nu\to\infty$ и $q\neq p$. Рассмотрим непересекающиеся окрестности U и U' точек p и q, соответственно. Так как Γ обладает K-свойством, то можно найти такую окрестность V точки p, что $V\subset\overline{V}\subset U$ и $d_{N\setminus\Gamma}(N\setminus U; (N\setminus\Gamma)\cap V)>0$. С другой стороны, поскольку $q_\nu\in U'\subset N\setminus U$ и $p_\nu\in V$ для всех достаточно больших номеров ν и $d_{N\setminus\Gamma}(p_\nu, q_\nu)\to 0$ при $\nu\to\infty$, то $d_{N\setminus\Gamma}(N\setminus U; (N\setminus\Gamma)\cap V)=0$. Противоречие.

Обратно допустим, что некоторая точка $y\in\Gamma$ имеет такую окрестность U, что для любой окрестности V точки y, $\overline{V}\subset U$, справедливо $d_{N\setminus\Gamma}(N\setminus U; (N\setminus\Gamma)\cap V)=0$. Рассмотрим счетную базу окрестностей $V_1\supset\ldots\supset V_n\supset\ldots$ точки y и выберем точки $p_n\in V_n$ и $q_n\in N\setminus U$ так, чтобы $d_{N\setminus\Gamma}(p_n, q_n)<\frac{1}{n}$, $n\in\mathbf{N}$. Так как $N\setminus U$ — компактное многообразие, то можно считать, что $q_n\to q\in N\setminus U$ при $n\to\infty$. Тогда (p_n) является P-последовательностью для отображения вложения λ.

5. Результаты, полученные в пунктах 1, 2 и 4, позволяют показать другое обобщение признака Монтеля для семейства голоморфных отображений в следующей форме.

Теорема 3. *Пусть* M *— гиперболическое многообразие и* N *— компактное комплексное многообразие. Пусть* Γ *— такое замкнутое подмножество в* N*, что* $N\setminus\Gamma$ *является гиперболическим многообразием и* Γ *обладает* K*-свойством. Если ни одно из отображений семейства* $\mathcal{F}\subset\mathcal{H}(M, N)$ *не принимает значений из* Γ*, то* $\mathcal{F}$ *является нормальным семейством.*

Доказательство. Мы покажем, что семейство $\mathcal{F}$ не обладает P-последовательностями, откуда в силу результатов из пунктов 1 и 2 следует, что $\mathcal{F}$ является нормальным семейством.

Прежде всего заметим, что семейство $\mathcal{F}^*$, состоящее из отображений $f\in\mathcal{H}(M, N\setminus\Gamma)$, образует на M равностепенно непрерывное семейство, поскольку голоморфные отображения обладают свойством невозрастания расстояния относительно функций расстояния Кобаяси d_M и $d_{N\setminus\Gamma}$. Допустим теперь, что семейство $\mathcal{F}$ обладает P-последовательностью (p_ν). Значит, существуют такая последовательность точек $(q_\nu)\subset M$ и такая последовательность отображений $(f_\nu)\subset\mathcal{F}$, что $d_M(p_\nu, q_\nu)\to 0$ и $d_\Delta(f_\nu(p_\nu), f_\nu(q_\nu))\to 0$ при $\nu\to\infty$. Так как $d_{N\setminus\Gamma}(f_\nu(p_\nu), f_\nu(q_\nu))\leqslant d_\Delta(p_\nu, q_\nu))$, то последовательность точек $(f_\nu(p_\nu))$ из $N\setminus\Gamma$ обязана быть P-последовательностью для отображения вложения $\lambda: N\setminus\Gamma\to N$, что противоречит теореме 2.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Академия наук Армянской ССР
Справочно-информационный отдел

Վ. Ի. ԳԱՎՐԻԼՈՎ, Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

Հոլոմորֆ արտապատկերումների ընտանիքի նորմալության հայտանիշներ

Մոնտելի դասական թեորեմը պնդում է, որ մերոմորֆ ֆունկցիաների F բազմությունը հարթության G տիրույթում կազմում է նորմալ ընտանիք, եթե կարելի է ցույց տալ այնպիսի երեք իրարից տարբեր $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ արժեքներ Ռիմանի գնդի վրա, որ $f(z)=\omega_i$, $i=1, 2, 3$ հավասարումները չունենան լուծում G-ում ցանկացած $f\in F$ ֆունկցիայի համար։

Ցույց տալով, որ այս թեորեմը իրականում ունի տոպոլոգիական բնույթ, ներկա հոդվածում մենք տարածում ենք Մոնտելի թեորեմի պնդումը հիպերբոլիկ բազմաձևություններում հոլոմորֆ արտապատկերումների վրա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *S. Kobayashi*, Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings. Pure and Appl. Math., 2 M. Dekker, 1970. [2] *В. И. Гаврилов*, ДАН СССР, т. 151, № 1 (1963). [3] *K. T. Hahn*, Canad. J. Math., v. 36, № 4 (1984). [4] *H. H. Wu*, Acta Math., v. 119, № 3–4 (1967). [5] *В. И. Гаврилов*, Мат. сб., т. 67, вып. 3 (1965).