

УДК 517.928

МАТЕМАТИКА

Г. С. Маркосян

Асимптотическое решение задачи рассеяния для одной системы дифференциальных уравнений

(Представлено академиком АН Армянской ССР Р. А. Александрином 11/XII 1987)

В работах ^(1,2) рассмотрена задача о распространении и рассеянии изгибных волн по неоднородной пластине в случае нормального падения плоской волны. В настоящей статье рассмотрен случай произвольного направления распространения плоской волны по неоднородной полубесконечной пластине, а также задача об отражении плоской волны от края полубесконечной пластины.

Пусть параметры пластины являются функциями только от „у“ и имеют вид $\mu k(y)$, $\mu D(y)$, где $\mu > 0$ — большой параметр, функции $k(y)$, $D(y)$ бесконечно дифференцируемы и пусть $y \in I = [0, \infty)$ (т. е. пластина занимает область $y > 0$).

Изгибные колебания неоднородной пластины описываются системой восьми уравнений с восемью неизвестными (см. ^(1,2)):

$$\begin{aligned} V_x &= -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad V_y = -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad M_x = \mu D \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial V_y}{\partial y} \right), \\ M_y &= \mu D \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial V_x}{\partial x} \right), \quad M_{xy} = (1 - \nu) \mu D \frac{\partial V_x}{\partial x}, \\ Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \mu^3 k^4 D W &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь W — смещение срединной плоскости пластины, V_x и V_y — углы ее наклона, M_x и M_y — изгибающие моменты, M_{xy} — крутящий момент, Q_x и Q_y — поперечные силы, ν — коэффициент Пуассона, $\nu = \text{const}$.

Пусть на неоднородный участок пластины падает плоская изгибная волна единичной амплитуды

$$W = \exp[ik_0(x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0)],$$

где k_0 — волновое число пластины при $x \leq 0$, а θ_0 — угол падения плоской волны.

Решение системы (1) будем искать в виде

$$W = W^0 e^{i\beta x}, \quad V_x = V_x^0 e^{i\beta x}, \dots, \text{ где } \beta = k_0 \sin \theta_0 = \text{const},$$

$$W^0 = W^0(y), \quad V_x^0 = V_x^0(y), \dots \tag{2}$$

Система (1) сводится к системе четырех обыкновенных, линейных дифференциальных уравнений относительно четырех неизвестных W^0, V_y^0, M_y^0, Q_y^0 :

$$\frac{d\xi}{dy} = [\mu A_0(y) + A_1(y)]\xi, \quad (3)$$

где $\xi = (W^0, V_y^0, M_y^0, Q_y^0)^T$, T — операция транспонирования,

$$A_0(y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & D^{-1} & 0 \\ 0 & \beta^2(1-\nu) & 0 & 1 \\ D\varphi & 0 & \beta^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\varphi = \beta^4(1-\nu) - k^4$, а у матрицы $A_1(y)$ все элементы равны нулю, кроме $(A_1(y))_{12} = \beta^2(1-\nu)D'$. Для простоты вместо W^0, V_y^0, M_y^0, Q_y^0 напишем W, V_y, M_y, Q_y . Пусть выполнены условия: 1°. Система (3) не имеет точек поворота при $y \in I$, т. е. $k(y) \neq \beta$. 2°. $\lim_{y \rightarrow +\infty} k(y) = k_0 > 0$. Или $D(y) = D_0 > 0$. 3°. $k'(y), k''(y), D'(y), D''(y) \in L_1(0, \infty)$.

Собственные значения матрицы A_0 равны $\pm i\sqrt{k^2 - \beta^2}, \pm \sqrt{k^2 + \beta^2}$. Обозначим $\gamma = i\sqrt{k^2 - \beta^2}, \delta = \sqrt{k^2 + \beta^2}$.

Сделаем замену

$$\xi(y) = T(y)\eta(y), \quad (4)$$

где $T(y)$ есть матрица, приводящая матрицу A_0 к диагональному виду. Матрица $T(y)$ имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\gamma & \gamma & -\delta & \delta \\ D(\gamma\beta^2 - \gamma^2) & D(\gamma\beta^2 - \gamma^2) & D(\gamma\beta^2 - \delta^2) & D(\gamma\beta^2 - \delta^2) \\ D_1 k^2 & -D_1 k^2 & -D\delta k^2 & D\delta k^2 \end{pmatrix},$$

где столбцы матрицы T есть правые собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\pm \gamma, \pm \delta$ матрицы A_0 .

Замена (4) приводит систему (3) к виду

$$\frac{d\eta}{dy} = [\mu \Lambda_0(y) + B(y)]\eta, \quad \Lambda_0 = \text{diag}(\gamma, -\gamma, \delta, -\delta). \quad (5)$$

Элементы матрицы B имеют вид:

$$\begin{aligned} b_{11} &= b_{22} = -\frac{1}{2} \left(\frac{D'}{D} + \frac{\gamma'}{\gamma} + \frac{(k^2)'}{k^2} \right), \\ b_{33} &= b_{44} = -\frac{1}{2} \left(\frac{D'}{D} + \frac{\delta'}{\delta} + \frac{(k^2)'}{k^2} \right), \\ b_{12} &= b_{21} = \frac{\beta^2(1-\nu)D'}{2k^2 D} + \frac{\gamma'}{2\gamma}, \quad b_{34} = b_{43} = \frac{(\nu-1)\beta^2 D'}{2k^2 D} + \frac{\delta'}{2\delta}, \\ b_{21} &= q_{13}, \quad b_{23} = b_{14}, \quad b_{42} = b_{31}, \quad b_{41} = b_{32}, \\ b_{13}(b_{14}) &= \frac{D'}{4k^2 \gamma D} (\delta \pm \gamma)(\delta \mp \gamma \pm \nu \beta^2) + \frac{(\gamma \pm \delta)k'}{2k\gamma}, \end{aligned}$$

$$b_{31}(b_{32}) = \frac{D'}{4k^2\delta D} (\delta \mp \gamma)(\gamma\beta^2 \pm \delta\gamma) + \frac{(\gamma \pm \delta)k'}{2k\gamma}$$

(верхние знаки берутся для b_{13} и b_{31} , а нижние для q_{13} и b_{32}).

Далее сделаем вторую подстановку

$$\tau = (E + \mu^{-1}T_0)z, \quad (6)$$

где E — единичная матрица, матрица T_0 выбрана так, чтобы система (5) привелась к виду

$$\frac{dz}{dy} [\mu\Lambda_0 + \Lambda_1 + \mu^{-1}C(y, \mu)]z. \quad (7)$$

Здесь Λ_1 — диагональная матрица с элементами

$$\begin{aligned} \lambda_1^{1,2} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{D'}{D} + \frac{\gamma'}{\gamma} + \frac{(k^2)'}{k^2} \right), \\ \lambda_1^{3,4} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{D'}{D} + \frac{\delta'}{\delta} + \frac{(k^2)'}{k^2} \right), \quad \mu^{-1}C(y, \mu) = O(\mu^{-1}). \end{aligned}$$

Используя результаты из (3), получаем, что справедлива
Теорема. Если выполнены условия 1°–3°, то система (3) имеет решения

$$\xi_1(\xi_2) = \frac{\exp(\pm i\mu \int_0^y \sqrt{k^2 - \beta^2} dx)}{k\sqrt{D} \int_0^y \sqrt{k^2 - \beta^2}} [(1, \mp \gamma, D(\gamma\beta^2 - \gamma^2), \pm D\gamma k^2)^T + O(\mu^{-1})], \quad (8)$$

$$\xi_3(\xi_4) = \frac{\exp(\pm \mu \int_0^y \sqrt{k^2 + \beta^2} dx)}{k\sqrt{D} \int_0^y \sqrt{k^2 + \beta^2}} [(1, \mp \delta, D(\gamma\beta^2 - \delta^2), \mp D\delta k^2)^T + O(\mu^{-1})]$$

(верхние знаки берутся для ξ_1 и ξ_3 , а нижние для ξ_2 и ξ_4).

В задаче об отражении плоской волны от края полубесконечной пластины предполагаем, что пластина занимает область $y > 0$ и на границу падает плоская волна. Решение этой задачи имеет вид (см. в (1)) $\xi = \xi_2 + R\xi_1 + S\xi_4$, где R — коэффициент отражения, S — коэффициент амплитуды неоднородной волны. Рассмотрим различные типы граничных условий при $y=0$.

1. Пусть край пластины заземлен, т. е. краевые условия имеют вид

$$W \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{dW}{dy} \Big|_{y=0} = 0.$$

Тогда

$$R = \frac{i\sqrt{k^2(0) - \beta^2} - \sqrt{k^2(0) + \beta^2}}{i\sqrt{k^2(0) - \beta^2} + \sqrt{k^2(0) + \beta^2}} + O(\mu^{-1}),$$

$$S = -\frac{2i\sqrt{k^2(0) - \beta^2}}{i\sqrt{k^2(0) - \beta^2} + \sqrt{k^2(0) + \beta^2}} + O(\mu^{-1}).$$

2. Пусть край пластины закреплен шарнирно, т. е. краевые условия имеют вид:

$$W|_{y=0} = 0, \quad M_y|_{y=0} = 0.$$

В этом случае $R = -1 + O(\mu^{-1})$, $S = O(\mu^{-1})$.

Автор признателен М. В. Федорюку за постановку задачи и внимание к работе.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

2. Ս. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ

Յուման խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումները դիֆերենցիալ հավասարումների մի համակարգի համար

Դիտարկված է մեծ պարամետրով դիֆերենցիալ հավասարումների մի համակարգի ասիմպտոտիկ լուծումները գտնելու վերաբերյալ խնդիր: Լկյդ համակարգի լուծումների համար գտնված և խիստ՝ մաթեմատիկորեն, ապացուցված են ասիմպտոտիկ բանաձևեր: Հաշվված են տարրեր և դրային պայմանների համապատասխանող երկու կարևոր գործակիցներ:

Խնդրի առաջացել է կիսաանվերջ թիթեղի եզրից հարթ ալիքի անդրադարձման խնդրից: Լկյդ իսկ պատճառով շատ կարևոր նշանակություն է ձեռք բերում թիթեղի տատանման տեսության համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. В. Тюткин, Акустический журн, т. 8, № 2 (1962). ² В. В. Тюткин, А. П. Шкварников, Акустический журнал, т. 10, № 1 (1964). ³ М. В. Федорюк, Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, Наука, М., 1983.